2012 第4期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE 中华人民共和国教育部主管

ISSN 0488-7387



澳大利亚“数据收集和表征”录像课的特点及启示

200241 华东师范大学数学系2010级博士生(云南曲靖师范学院数学与信息科学学院) 吴 骏

200241 华东师范大学数学系2010级硕士生 谢正敏

TIMSS 1999的录像研究揭示了不同国家和地区数学课堂教学的共性和差异, 为这些国家和地区的数学教学提供了重要的参考[1]. 虽然TIMSS 1999录像取样分布于整个八年级中, 而且覆盖了该年级的主要教学内容, 但由于不同国家和地区八年级的教学内容不尽相同, 因此, 选择一个公共的内容进行比较是不可能的. 为进一步考察某一数学主题的具体教学情况, 需要采用个案研究的方法. 下面对澳大利亚TIMSS 1999的一节统计录像课“数据的收集和表征”进行分析, 以期对我国统计教学有所启示.

一、教学过程

根据TIMSS 1999录像报告分析, 澳大利亚的课堂活动主要有公共活动和个人活动两种形式. 公共活动指教师或学生(一个或多个)在课堂教学中表达自己对某一问题的看法; 个人活动指学生独自活动或多人进行小组活动, 教师在教室巡回走动, 对学生个别指导或与学生讨论问题. 下面根据这两种课堂活动回顾这节课的主要教学过程.

公共活动: 教师给出9个简单计算问题, 要求学生迅速写出结果. 教师念完题目后, 在黑板上给出了答案, 并针对学生出现的错误作出分析. 之后教师以讲故事的形式提出一个新问题: 一块巧克力饼干中至少应该有3片巧克力在里面, 这才是正常的. 如果烤6块饼干, 那么需要多少片巧克力才能保证每块饼干中至少有3片巧克力? 现在做一个模拟实验, 使用骰子来模拟巧克力, 骰子上面的数字为饼干中的巧克力片数. 接下来, 教师给学生分发学习单和骰子.

个人活动: 学生两人一组开始操作, 一人滚动骰子, 另一人在学习单中的“饼干”上记录数字. 教师提醒学生动作快些, 不要忘记得到的巧克力总数要保证每块饼干中至少有3片巧克力.

公共活动: 各小组计算6块饼干上的数字之和, 教师把这些结果写在黑板上, 依次是: 25, 27, 22, 36, 25, 29, 26, 33, 43. 教师要求学生根据这些数据, 列一个频数分布表.

个人活动: 当学生独立列频数分布表时, 教师在黑板上列出下面的表1, 要求学生填写相应内容.

公共活动: 教师读出表中的栏目, 学生填写数据, 最后得到频数为14, 数据总和为428. 然后, 教师要求学生求出表示集中趋势的三个数:平均数、中位数和众数.

表1 巧克力的频数分布表

巧克力数(x)	频数(f)	fx	累积频数($\sum f$)
22	1	22	1
25	3	75	4
26	1	26	5
27	1	27	6
28	1	28	7
29	1	29	8
31	1	31	9
33	1	33	10
36	2	72	12
42	1	42	13
43	1	43	14

个人活动: 学生独自在自己的本子上计算平均数、中位数和众数. 教师询问学生是否有困难.

公共活动: 教师问中位数是什么? 一学生回答: 中间的数. 教师指出, 因为这组数据共有14个数, 不能得到一个正中间的数, 因此, 需要把第7个数和第8个数加起来, 求出平均数, 得到一个数, 这就是中位数. 最后, 求出平均数为30.57, 中位数为28.5, 众数为25.

个人活动: 教师要求学生计算箱线图(box-and-whisker plot)的五要素: 最小数、第一个四分位数、中位数、第三个四分位数和最大数. 教师走到学生中间, 解释第一个四分位数的求法, 即把14个数分成两部分, 左右各有7个数, 第1至第7个数的中点是第4个数, 即为第一个四分位数. 同理, 可以求出第三个四分位数.

公共活动: 教师把学生求出的五要素写在黑板上, 即最小数22, 第一个四分位数25, 中位数28.5, 第三个四分位数36, 最大数43.

个人活动: 教师要求学生作一个箱线图, 并提醒学生自己确定刻度作图, 他问学生:“起点从什么地方开始呢?”

公共活动: 教师和学生共同讨论箱线图的作法. 教师在黑板上示范作出巧克力片数的箱线图, 如图1所示.



图 1

教师给每个学生发了一个图形计算器, 演示上述所做的箱线图. 在教师的引导下, 学生一步步地得到了巧克力片数的一组数据.

在利用计算器模拟箱线图实验之前, 教师要求学生对所得结果作出解释:“你认为需要多少巧克力才能确保每块饼干中至少有3片巧克力?”学生回答, 大约30片, 原因是算出来的平均数是30.57. 教师问, 为什么选择平均数, 而不选择众数呢? 由此展开讨论, 学生结合个人的经历发表自己的看法, 直至下课铃声响起.

二、特征分析

根据TIMSS 1999录像研究报告, 数学课堂教学特征可以从课堂教学结构、课堂教学活动和课堂教学实践三个方面进行分析.

1. 关于课堂教学结构

本节课记录的教学时间共为43′17″, 其中复习24′15″, 介绍新内容8′47″, 练习新内容10′15″. 教师在复习上用时较多, 介绍新内容用时反而较少. 这说明, 这节课更强调对已经学过内容的复习.

在复习阶段, 不仅练习了9个简单计算问题, 还通过巧克力饼干这样一个现实生活中的问题, 进一步复习和巩固了平均数、中位数和众数的概念. 同时, 教师提出了本节课的学习目标, 他告诉学生, 我们所要做的是一个模拟实验, 需要自己去收集相关的数据, 并用统计方法表示出来.

新内容的介绍主要是箱线图的学习. 箱线图是基于5个数的图形概括: 最小数、第一个四分位数、中位数、第三个四分位数和最大数. 在作图过程中, 学生讨论了刻度的大小, 教师在黑板上示范了箱线图的作法.

对新内容的练习主要利用图形计算器模拟箱线图实验. 遗憾的是, 在最后阶段, 由于学生联系各自不同的生活经历, 对所得结果解释过多, 最终没有完成箱线图的演示过程. 不过, 从另外一个方面来看, 这样做使得学生把数学与现实生活产生了联系, 不再认为数学是一门孤立的学科.

2. 关于课堂教学活动

在两种课堂教学活动中, 公共活动主要是师生互动, 个人活动主要是一个人或两个人的活动. 总体来看, 两种课堂活动之间发生10次转换. 在课堂活动的过程中, 学生的认知活动也在发生变化. 根据Mooney提出的统计思维发展框架, 可以把学生的认知活动分为4个过程[2]: (1) 描述数据: 能够收集和确定数据; (2) 组织和简化数据: 用一个概要的形式管理、分类和合并数据; (3) 表征数据: 用图表的形式呈现数据(如折线图、直方图等); (4) 分析和解释数据: 从一个图表中识别数据的发展趋势、作出推断或预测. 分析结果见表2所示.

表2 课堂活动持续的时间及学生的认知活动

序号	活动类型	活动目的	时间	学生认知活动
1	公共活动	(1) 复习旧知	3′33″	
		(2) 提出问题	2′31″	
2	个人活动	确定饼干上的巧克力片数	2′51″	描述数据
3	公共活动	统计饼干上的数据之和	1′06″	描述数据
4	个人活动	列频数分布表	5′44″	组织和简化数据
5	公共活动	填写频数分布表	1′	组织和简化数据
6	个人活动	计算平均数、中位数和众数	1′22″	组织和简化数据
7	公共活动	教师解释中位数的计算	2′30″	
8	个人活动	计算箱线图的五要素	3′12″	组织和简化数据
9	公共活动	确认箱线图的五要素	1′32″	
10	个人活动	构建箱线图	4′19″	表征数据
11	公共活动	(1) 教师示范作出箱线图	3′23″	表征数据
		(2) 计算器模拟实验	4′11″	
		(3) 解释所得结果	6′03″	分析和解释数据

从表中可以看到, 在两种课堂活动中, 累计用时最多的是公共活动(26′30″). 实际上, 在公共活动中, 教师不断与学生交流, 形成师生互动, 单纯的教师讲授已经很少了. 即使在学生个人

活动中, 教师也经常参与其中, 询问学生遇到的困难, 进行个别指导. 在师生互动过程中, 教师的干预激发了学生的认知活动, 使学生的统计思维从低水平发展到高水平, 经历了描述数据、组织和简化数据、表征数据、分析和解释数据四个过程.

3. 关于课堂教学实践

由于数学教学在很大程度上是通过数学问题来实施的, 因此, 课堂教学实践的主要特征是数学问题的呈现及其解决的方法. 本节课涉及到的数学问题主要有两个: 一个是确定巧克力饼干中的巧克力片数, 另一个是构造箱线图. 在第一个问题中, 要求滚动骰子足够多的次数, 以确保最后得到的巧克力能分成6份, 每份至少有3片巧克力, 而不必顾虑某块饼干中巧克力的多少. 例如, 教师对一个学生说, 如果第5块饼干中的巧克力为10片, 这也没关系. 当然, 这就意味着, 某一块饼干中的巧克力片数少于3片也是可以的. 在第二个问题中, 学生可以自己创造表示数据的刻度, 数据的起点和终点也由自己确定, 例如可以从22开始, 至43结束; 或从1开始, 至50结束. 但是, 比较好的刻度是从20至44. 由此可见, 这是两个开放性的数学问题, 给学生提供了采用不同方法独立解决数学问题的机会.

三、对我国统计教学的启示

上述特征分析表明, 该节录像课虽然也存在一些不足; 但还是有不少值得我们学习和借鉴的地方. 结合我国的统计教学, 提出如下教学建议:

1. 箱线图的教学要提前

箱线图显示出一组数据的中位数及数据的离散情况, 它的最大优点是在表示集中量的同时, 又能揭示出数据的离散情况, 这是其它统计图所不具备的功能. 国外的统计教学, 较早使用箱线图表示数据, 大多在八年级出现, 还有些在九年级出现. 而我国对箱线图的介绍较晚, 中学统计教学对箱线图未作要求。大学的概率统计教学, 直至2008年在盛骤等编写的高等学校教材《概率论与数理统计》(第四版) 中, 才新增加了箱线图的内容, 用于描述随机变量分布的性质. 我们应及早教给学生这种表示数据的方法, 不仅使数据的描述更为直观, 统计量的计算更加方便, 而且能了解数据的分布情况及其性质[3].

2. 发挥计算机模拟实验的功能

统计概念的教学不应该从数学理论开始, 而更多地借助于模拟实验. 在目前的统计教学中, 模拟实验已经越来越普遍了. 模拟实验是解决数学问题的重要工具, 能帮助学生构建对抽象概念的深刻理解. 模拟实验让学生看到的是一个动态的过程, 而不是静态的画面. 我国统计教学中都介绍了利用计算机计算统计量的方法, 但没有运用于模拟实验. 事实上, 计算机模拟实验为学生的探究活动提供了有力的帮助, 特别是在处理具有否定假设 (what if not) 的问题上更有优势. 例如, 如果改变了箱线图的五要素, 那么箱线图的形状将会发生什么变化呢? 要检验这样的问题, 可以利用计算机模拟实验直观地表现出来. 我们在统计教学中, 要充分发挥计算机模拟实验的功能, 并让学生理解模拟实验的意义.

3. 提高师生互动的有效性, 发展学生的统计思维

统计思维不同于数学思维, 它往往是学生在解决现实世界问题的过程中逐步发展起来的. 在统计活动中, 很多学生能成功地概括和表征数据, 然而, 很少有学生能对自己获得的统计结果作出正确的解释, 并得出令人信服的结论. 他们只是机械地完成了整个程序, 而认知水平没有得到进一步的提高. 在师生互动的课堂活动中, 教师起主导作用. 在很多情况下, 师生互动是由教师的提问引导的. 因此, 在统计教学中, 教师应该提出有一定价值的问题, 并给学生提供讨论和交流的时间和机会, 以及让他们参与一些有认知需求的活动, 以此提高师生互动的有效性, 达到发展学生统计思维的目的.

参考文献

[1] Hiebert J, Gallimore R, Garnier H, et al. Teaching mathematics in seven countries: results from the TIMSS 1999 video study[M]. Washington DC:National Center for Education Statistics, 2003.

[2] Mooney E S. A framework for characterizing middle school students' statistical thinking[J]. Mathematical Thinking and Learning, 2002, 4 (1): 23-63.

[3] 吴骏, 汪晓勤. 中国与新加坡初中数学教材中的“平均数、中位数和众数”比较 [J]. 数学通报, 2011, 50 (5): 23-26.

课堂教学设计要有学生参与的空间

200062 上海市曹杨二中 黄 坪

一、教学目标的定位设计

在设计等比数列的一堂复习课时, 笔者把教学目标定为把非等比数列的问题转化为等比数列来解决, 其中的知识点是等比数列的通项公式与求和公式, 解题的思想方法是化归法. 下面是教学过程的设计.

笔者先设计这样两个例题:

例1 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$, 求a_n和S_n的表达式.

化归技巧是: 设$a_{n+1}+\lambda=2(a_n+\lambda)$, 则$\lambda=1$即可构造出数列$\{a_n+1\}$是首项为2, 公比为2的等比数列, 从而求出通项表达式$a_n=2^n-1$与前n项和的表达式$S_n=2^{n+1}-n-2$.

若设$x=a_n$, $y=a_{n+1}$, 则$y=2x+1$, 我们把这类问题称为一次型函数问题.

例2 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$, 其前n项和记为S_n, 且$3S_{n+1}=2S_n+1$, 求a_n和S_n的表达式.

思路1 (先求a_n, 再求S_n):

由$3S_{n+1}=2S_n+1$, ………………………… ①

当$n\geqslant 2$时, $3S_n=2S_{n-1}+1$.………… ②

① − ②, 得$3a_{n+1}=2a_n$,

即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2}{3}$.

由已知得$a_2=-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{a_2}{a_1}=-\dfrac{1}{6}\neq\dfrac{2}{3}$,

所以这个数列从第二项起为等比数列.

思路2 (先求S_n, 再求a_n):

由$3S_{n+1}=2S_n+1$, 得$S_{n+1}=\dfrac{2}{3}S_n+\dfrac{1}{3}$, 这是关于$S_n$的一次型函数, 接下来的解法同例1.

例2与例1相比, 是把通项的关系式变成了求和的关系式, 但一次型函数的模型没有改变, 所用的化归技巧和方法也没有改变, 也是通过转化为等比数列来求解. 要注意的是思路1中的数列$\{a_n\}$从第二项起为等比数列; 思路2是直接把关系式看成一次型函数, 和例1的解法思路是一样的.

总结: 如果相邻两项满足递推关系式: $a_{n+1}=qa_n+p$ ($p\in\mathbf{R}$, $q\in\mathbf{R}$且$q\neq 0$, 我们都可以求出这个数列的通项. 当$q=1$时, $\{a_n\}$为等差数列, $a_n=a_1+(n-1)p$; 当$q\neq 1$时, 且$a_1\neq\dfrac{p}{1-q}$, $\left\{a_n+\dfrac{p}{q-1}\right\}$是等比数列, $a_n=\left(a_1+\dfrac{p}{q-1}\right)q^{n-1}$, 然后再求它们的前$n$项和$S_n$.

接下来, 笔者要在课堂里问学生下例该如何设计问题. 笔者原来的设计思路是a_n和S_n混合型的例子.

例3 已知数列$\{a_n\}$满足$a_n+S_n=n$, 求a_n.

解答思路: 由$a_n+S_n=n$,………………… ①

当$n\geqslant 2$时, $a_{n-1}+S_{n-1}=n-1$. …… ②

① − ②, 得$2a_n-a_{n-1}=1$, 下面就化归为例1的问题了. 接下来, 笔者再给学生列举混合型问题的例子, 如2010年上海高考文、理科题.

文科: 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 且$S_n=n-5a_n-85$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 证明: $\{a_n-1\}$是等比数列;

(2) 求数列$\{S_n\}$的通项公式, 并求出使得$S_{n+1}>S_n$成立的最小正整数n.

理科: 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 且$S_n=n-5a_n-85$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 证明: $\{a_n-1\}$是等比数列;

(2) 求数列$\{S_n\}$的通项公式, 并求出n为何值时, S_n取得最小值, 并说明理由.

上述是笔者课前的预设, 把三维教学目标进行分解. 如果能把知识与技能、过程与方法教学目标落实到位, 情感态度与价值观的教学目标就有了形成和立足的基础. 教学目标的预设是课堂教学得以展开实现的前提, 它的负面效应是课堂

教学缺乏生机、缺乏思维的创造力，在课堂里，看到更多的是老师的讲授，学生被老师的思维牵着走，而缺少了学生生动的自主探究.

二、教学目标的创新设计

例1、例2都是一次型函数，例1是相邻两项的通项递推式，例2是相邻两项的求和递推式. 我们如何来设计例3呢？在实际课堂中没想到学生并没有朝笔者设计的思路走下去. 有一位学生回答，下面应该设计二次型函数的数列了. 笔者当时一愣，因为这类问题不在笔者这次课的准备之中，笔者之前也没有研究过这类数列，但笔者没有否定他，请他举例.

学生设计：已知数列$\{a_n\}$，$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n^2$，求a_n.

如何来求解？学生说没有想好. 过了一会，另一学生说，构造新数列$\{\lg a_n\}$，因为$\dfrac{\lg a_{n+1}}{\lg a_n}=2$，所以数列$\{\lg a_n\}$是首项为$\lg 3$，公比为2的等比数列. 这位学生的创新思维能力很强，生成了一个新的数列. 笔者也暗暗庆幸自己顺从了学生的思路，学生的创造性思维火花没有被扼杀掉.

接下来就可以求通项了，由$\lg a_n=2^{n-1}\lg 3=\lg 3^{2^{n-1}}$得$a_n=3^{2^{n-1}}$.

笔者认为学生设计的问题和得到的解法很好，这个问题也在教学目标之中，即转化为等比数列的问题再进行求解. 虽然第一位学生刚抛出问题时思路不太清晰，但在师生的共同努力下，我们解决了问题. 本题巧就巧在构造出了一个新的辅助数列$\{\lg a_n\}$，需要一定的想象能力，在数学的探究中提出一个有价值的问题有时比解决一个问题要来得困难.

教师作归纳总结：我们设计了简单的二次型函数的问题，如果把这个问题推广到q次型函数的问题也应该能够解决. 即在数列$\{a_n\}$中，已知：$a_1>0, a_1\neq 1, a_{n+1}=a_n^q$，当$q\neq 0$时，$\dfrac{\lg a_{n+1}}{\lg a_n}=\dfrac{\lg a_n^q}{\lg a_n}=q\neq 0$，生成的数列$\{\lg a_n\}$均为等比数列.

教师继续提出这样的问题：已知数列$\{a_n\}$满足递推关系式：$a_{n+1}=a_n^2+\lambda a_n+\mu$. 问$\lambda$、$\mu$满足什么关系时，也能通过构造等比数列来求解？

学生探索：$a_{n+1}=a_n^2+\lambda a_n+\dfrac{\lambda^2}{4}+\mu-\dfrac{\lambda^2}{4}=\left(a_n+\dfrac{\lambda}{2}\right)^2+\mu-\dfrac{\lambda^2}{4}$，即

$$a_{n+1}+\frac{\lambda}{2}=\left(a_n+\frac{\lambda}{2}\right)^2+\mu-\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda}{2}.$$

令$\mu-\dfrac{\lambda^2}{4}+\dfrac{\lambda}{2}=0$，则$\mu=\dfrac{\lambda^2}{4}-\dfrac{\lambda}{2}$. 在这里构造了新数列$\left\{\lg\left(a_n+\dfrac{\lambda}{2}\right)\right\}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，公比均为2. 还要加首项不为0和真数大于0的条件，得到$a_1>-\dfrac{\lambda}{2}$且$a_1\neq 1-\dfrac{\lambda}{2}$，这样对二次型函数的问题得到了较深一步的研究.

这堂课，笔者没有按照自己事先设定的思路来讲解，而是遵循学生的思路另辟蹊径，把教学目标的落实演绎得也很精彩. 教师通过学生的想象力和探究力，把学生引导到了一个对教师和学生来说都比较新的天地.

上面的研究美中不足的是把二次项系数设为1了，如果不一定为1，怎么办？

设$a_{n+1}=va_n^2+\lambda a_n+\mu$，这是二次型函数的一般形式了.

学生自主探究，得到

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=va_n^2+\lambda a_n+\mu\\&=v\left(a_n+\frac{\lambda}{2v}\right)^2+\mu-\frac{\lambda^2}{4v},\end{aligned}$$

即$a_{n+1}+\dfrac{\lambda}{2v}=v\left(a_n+\dfrac{\lambda}{2v}\right)^2+\mu-\dfrac{\lambda^2}{4v}+\dfrac{\lambda}{2v}$,

令$\mu=\dfrac{\lambda^2}{4v}-\dfrac{\lambda}{2v}$，得到$\lg\left(a_{n+1}+\dfrac{\lambda}{2v}\right)=\lg v+2\lg\left(a_n+\dfrac{\lambda}{2v}\right)$，其中$v>0$. 这又把问题转化为一次型函数问题. 进一步转化，得到$\lg\left(a_{n+1}+\dfrac{\lambda}{2v}\right)+\lg v=2\left[\lg\left(a_n+\dfrac{\lambda}{2v}\right)+\lg v\right]$.

由此我们得到了一个一般性结论：

数列$\{a_n\}$，若$a_{n+1}=va_n^2+\lambda a_n+\mu, v>0$，且$\mu=\dfrac{\lambda^2}{4v}-\dfrac{\lambda}{2v}$，$a_1\neq\dfrac{1}{v}-\dfrac{\lambda}{2v}$且$a_1>-\dfrac{\lambda}{2r}$，则$\left\{\lg\left(a_n+\dfrac{\lambda}{2v}\right)+\lg v\right\}$是首项为$\lg\left(a_1+\dfrac{\lambda}{2v}\right)+\lg v$，公比为2的等比数列.

课后笔者又布置学生设计分式型函数的问题，学生发现具有一次分式递推关系$a_{n+1}=\dfrac{va_n}{\lambda a_n+\mu}$，$\lambda\mu v\neq 0$的数列，其倒数生成的数列都可以转化为$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{\mu}{v}\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{\lambda}{v}$数列，这是课堂里笔者已经解决了的一次型函数的问题，学生

基于旦德林双球模型的椭圆定义教学

322000 浙江省义乌市第四中学 陈 锋 浙江省义乌中学 王 芳

历史上，古希腊人先是从圆柱或圆锥的截口上发现椭圆. 公元前3世纪，阿波罗尼斯(Apollonius)在《圆锥曲线》中采用了截线的定义，并由多个命题导出椭圆焦半径之和等于常数这一性质[1]. 如图1，点O为椭圆的中心，AB为椭圆的长轴，F_1和F_2为焦点，AC和BD与AB垂直，点P为椭圆上异于A、B的任意一点，椭圆在点P处的切线分别与AC和BD交于点C和点D. 过点F_1作F_2P的平行线，交DC(或DC的延长线)于点L. 过点O作F_2P的平行线，交CD于点G，因$\angle F_1PG=\angle F_1LG$，故$PF_1=LF_1$，$F_1G\perp CD$. 阿波罗尼斯证明$\angle AGB=90^\circ$. 故$PF_1+PF_2=LF_1+PF_2=2OG=AB$.

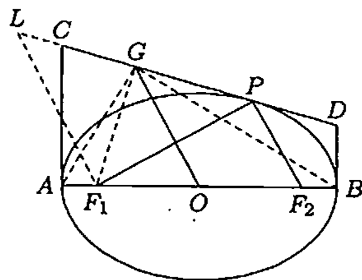


图1

17世纪，荷兰数学家舒腾(F. van Schooten, 1615 ~ 1660)给出了椭圆的三种作图工具，其中一种即利用了焦半径之和为常数的性质[2]. 法国数学家洛必达(M. de L'Hospital, 1661 ~ 1704)在《圆锥曲线分析》中抛弃了阿波罗尼斯的截线定义，将椭圆定义为平面上到两定点距离之和等于常数的动点轨迹[3]. 直到1822年，比利时数学家旦德林(G. P. Dandelin, 1794 ~ 1847)在一篇论文中才利用圆锥的两个内切球，直接在圆锥上导出椭圆的焦半径性质，从而证明了截线定义与轨迹定义的统一性.

人教A版高中数学课程标准实验教科书之“选修2-1”中，“椭圆及其标准方程”一节先直接给出椭圆的画法，再给出椭圆的定义. 调查表明，学生对此心存疑惑：课本上的椭圆画法是怎么产生的？“平面与圆锥的截痕，与按照课本定义画出来的曲线是一样的吗？圆锥曲线为什么要用这样的定义呢？”[4] 这些疑惑源于教学中对椭圆知识发生过程的忽略.

笔者借鉴椭圆知识发生和发展的历史，运用发生教学法，在浙江省某重点中学实施了一次教学实验，取得很好的效果. 本文给出课堂实录片段和教学反思.

1. 课堂实录

首先通过PPT放映的球在太阳下的影子图片，引导学生观察球在水平地面上影子轮廓的形状. 学生很快回答说，轮廓是椭圆. 显然，学生很熟悉生活中的“椭圆”.

师：为了让大家看得更清楚些，我们做一个模拟实验，用手电筒模拟太阳光照射小球.

当平行光垂直于桌面照射时，球在桌面上的影子的轮廓是什么形状？

生：圆.

师：很好，那圆的圆心在哪里？

生：哦，就是球与桌面相切的切点.

师：也就是说，圆上的点到切点的距离是定值.

当平行光开始倾斜照射时，球的影子轮廓上的点到切点的距离显然已经不是定值，那它还有没有其它规律可循呢？

(教师用几何画版模拟平行光照射球的过程，

的想象空间又有了新的延拓.

要学生也来参与课堂教学的设计，教师首先要有一个教学目标的设计，在教学目标实施的过程中，以问题的设问和变换为契机，不断地发现新的问题，激发学生设计问题的想象能力和解决问题的创新能力.

在立体几何图形上探究各个几何元素之间的关系.)

下面, 我们用几何画板动画模拟平行光照射球的过程, 如图2.

师: 实际上, 椭圆形影子的轮廓是由一束特殊的平行光照射在平面上产生的. 这一束特殊的平行光可以看成是一个与球相切的圆柱面. 这时候, 椭圆形影子的轮廓可以看成……?

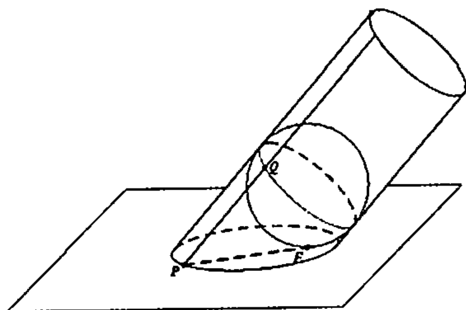


图2

生: 圆柱面与平面的交线 (平面与圆柱面截出来的).

师: 很好. 我们设球与平面的切点为F, 在轮廓上任取一点P, 连结PF, 经过P点的光线PQ与球相切于点Q. 当点P在椭圆上运动时, 有哪些点、线、面的位置与长度在变化, 而哪些关系没有变?

(学生观察动画, 思考并整理, 由于前面的手电筒照射球实验, 学生把目光都集中在点P, 和线段PF上.)

生1: 线段PF的长度在变化, 而且很有规律, 好像是先变长后变短;

生2: 线段PF始终在平面上, 光线PQ始终在圆柱面上;

生3: 线段PF都交于点F, 光线PQ始终平行;

生4: 光线PQ始终与球相切, 线段PF也始终与球相切;

生5: 线段PQ等于线段PF;

……

师: 非常好. 不论点P运动到哪里, 线段PQ与线段PF的长度始终相等, 而线段PQ是圆柱面上的平行线, 研究起来比较方便. 为了更方便地研究线段PQ长度的变化规律, 我们把圆柱面竖直放置, 如图3.

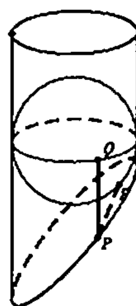




图3 图4

(利用事先准备好的教具, 在实物上借助小纸片将圆柱面展开成平面图形, 如图4, 再开展学生小组活动来研究PQ的长度变化规律.)

师: (手拿实物教具) 面对圆柱面上的这些平行线, 我们一般怎么处理?

生: 展开成平面图形 (事先准备好展开的纸片, 用蓝黄两种颜色).

师: 很好, 立体问题平面化是我们常用的策略. 展开时, 利用前后对称性, 其实只要展开一半 (边说边展开).

现在我们在这个平面图形上来研究线段PQ的变化规律. 老师事先也准备了很多这样的彩纸. 下面我们前后6位同学一组, 每组两张不同颜色的彩纸, 一起研究, 看看大家能否发现有价值的关系或特征.

(学生活动5分钟. 展示3种不同的发现.)

师: 经过大家的努力, 我们得到了三种不同的方案 (图5), 下面请发现者叙述他们的结论.

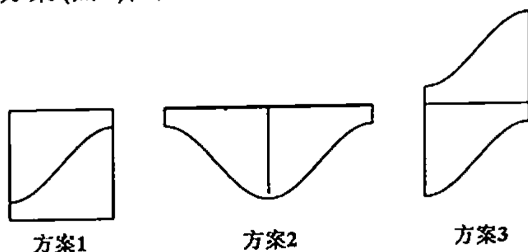


图5

生5: 拼起来是矩形, 线段长度之和为定值;

生6: 两张纸拼起来像正弦曲线的一部分;

生7: 两张纸拼起来得到一个曲边的四边形, 他们的长度之和好像也是定值.

师: 我们分析一下这三种方案.

生8: 我首先否定方案2, 它实际上只是把圆柱面整圈都展开, 没有实质性进展.

生9: 我否定方案3, 曲边四边形不好驾驭.

生10: 方案1最好, 矩形中两段线段长度和

是定值, 很对称.

师: 很好. 我们回到实物模型上去, 方案1给我们什么启示?

生: 在圆柱面的下方补一个对称的圆柱面, 形成一个完整的圆柱面.

(马上实现学生的想法.)

生: 当点P在截线上运动时, 上下两段线段之和始终不变.

师: 很好, 我们再一次回到动画中, 下方补一个圆柱面(图6). 当点P运动时, $|PQ|+|PR|$是定值. 根据对称性, 上面有一个球与截面相切……

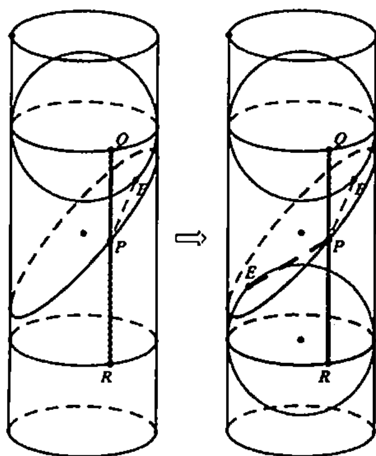


图 6

生: 下面也有一个球.

师: 很好, 我们设球O_2与截面相切的切点为E, 根据前面的分析, 我们可以得到什么关系?

生: $PE=PR$.

生: 哦, 原来$|PE|+|PF|$是定值(学生们不约而同地喊了出来)!

师: 对, 这个性质对椭圆上所有的点都成立吗?

生: 成立.

师: 毕竟椭圆是平面图形, 我们把这个椭圆所在的平面拿出来. 从度量的角度来看, $|PE|+|PF|$是定值(动画演示, 如图7).

师: 当截面的角度发生改变时, 椭圆的大小发生变化, 我们再来看看$|PE|+|PF|$是不是都为定值(动画演示).

师: 通过试验, 我们发现整个椭圆体系都有这样的特性: 都存在两个定点E、F, 使得椭圆上所有的点P满足$|PE|+|PF|$是定值. 我们把这两个定点叫做椭圆的焦点, 通常用F_1、F_2表示. 那么, 我们可以给椭圆下一个什么样的定义呢?

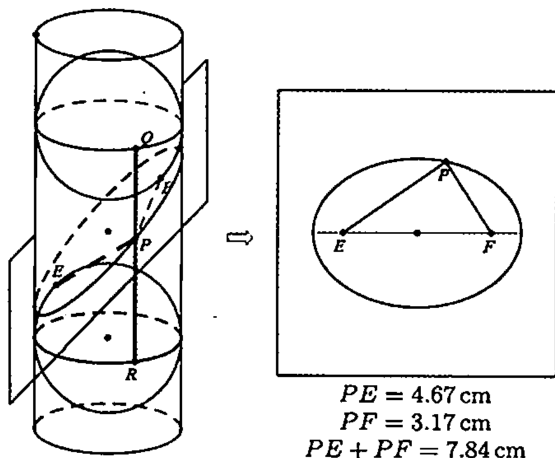


图 7

生: 平面上到两定点的距离之和为定值的点的轨迹叫椭圆.

师: 很好, 这位同学提到了在平面内, 考虑到椭圆是平面图形. 下面请同学们翻到书本第38页认真阅读椭圆的定义这一段内容.

师: 请大家思考, 为什么这个常数要大于$|F_1F_2|$?

生: 因为在三角形中两边之和要大于第三边.

师: 对, 看来我们给一个数学概念下定义时, 要注意措辞的精确性.

师生: 我们把平面内与两个定点F_1、F_2的距离之和等于常数(大于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做椭圆. 这两个定点叫做椭圆的焦点, 两焦点间的距离叫做椭圆的焦距.

生: 丹德林双球试验里上下两个球与截面的切点就是截面椭圆的焦点. 也就是说球与地面的切点就是阴影轮廓椭圆的焦点.

2. 设计意图说明

本节课采用了发生教学法. 从生活中的椭圆入手, 重构历史, 让学生经历从截面定义到书本定义的知识发生过程, 基于旦德林双球实验, 开展学生探究数学实验等一系列活动.

人教A版选修2-1的课后探究与发现专门介绍了在圆锥内的旦德林双球模型, 教材的编者也想让学生了解这段著名历史, 但是基于难度较大, 需要花较多的教学时间, 不得已将这段内容放在课后阅读材料中. 本节课采用以下方法来突破旦德林球这一难点: 第一, 采用圆柱内的旦德林双球模型, 上下两个球是等半径的; 第二, 关

键环节运用实物演示实验，设计学生探究活动；第三，利用几何画板，富有立体感地展现各几何元素之间的关系和动态的运动过程. 教学时间的问题与上述难点突破是相辅相成的，笔者第一次上这节课时，由于启发不到位需要花费大量的时间来完成整节课，并且学生的学习效果并不好，但是通过改进教学流程，取得了理想的效果.

关于几个教学难点，说明如下.

(1) 关于手电筒照射球的实验.

球在斜射阳光的照射下，影子是椭圆这个事实学生是认同的，但从中抽象出旦德林单球模型是很难想到的. 我们知道，球与地面的切点就是椭圆的焦点，在本节课中，这个切点的作用至关重要. 但由于切点淹没在黑暗中，被球挡住了，不便于观察，也很难去注意它，因此要在图2中弄清楚各种几何要素的相互关系就更难了. 笔者第一次上实验课时，让学生寻找单球模型中的关系时，由于没有铺垫过，学生的答案五花八门，比如光线越倾斜，影子拉得越长；光线越强，影子越暗等. 很少有学生能从相切，长度的角度去研究问题，大部分学生都没注意到切点F.

为此，笔者设计了用手电筒照射球的现场实验，一是激发学生的兴趣，二是启发学生关注切点的重要性. 光线从垂直照射到斜射，影子从圆变成椭圆，而切点就是圆的圆心，并且圆上的点到切点的距离是定值，倾斜照射时，切点还在，但椭圆上的点到切点的距离已经不是定值了. 那么，椭圆上的点到切点的距离有其他的规律吗？这就为后面的结论"切点就是焦点"做了铺垫. 笔者在重新上课时，学生就能在几何画板中关注到切点F，关注线段PF与PQ的长度关系.

圆是学生熟知的知识，阳光斜射球，影子是椭圆也是学生熟知的现象. 通过上述实验将两者联系在一起，充分考虑到学生的认知基础和教学新知识的过渡与衔接.

(2) 关于学生拼凑纸片的活动

面对倾斜的半个圆柱面，学生很难想到它的另一半，更难想到下面再来一个球，得到另一个切点. 原因是多方面的：其一，圆柱面是倾斜的，对称思想不易想到；其二，圆柱面出现在几何画板中，出现在学生的抽象思维中，过于抽象不利于学生思考；其三，"补"的过程本身就很难.

因此，为了减低难度，首先将倾斜的圆柱面竖直放置，其次准备圆柱面的实物教具，让学生能看得到摸得着圆柱面，大家想办法. 学生面对实物时马上就统一意见：将圆柱面展开成平面图形试试看. 笔者顺势将班级分成若干个小组，让学生动手试验，小组讨论. 学生的思路很多，经过比较判断，大家能一致认同方案1，补形思想就已经成型了.

通过这样的学生活动，能让学生自己发现补形思想，体验成功的快乐，也能培养学生的动手能力和思考能力.

(3) 关于截面平面化的动画

旦德林双球试验是立体几何的方法，而教材上呈现的是椭圆的平面画法. 椭圆毕竟是平面图形，因此有必要将两者统一起来. 另外，用不同角度的光线照射球，或者用不同倾斜程度的平面去截圆柱面，会得到大小不一的椭圆. 有必要证实一下椭圆体系都满足定义.

基于以上两点，笔者利用几何画板强大的动画功能，将圆柱面上的截面直观图通过一个动态的渐变，变成平面图，再在平面图上制作一个动画，通过度量工具证实了椭圆上的点到两定点的距离之和是定值这个事实，这就实现了旦德林双球试验与教材的统一. 最后通过改变截面的倾斜角度，得到大小不一的椭圆，再重复上述动态的度量过程，证实了椭圆体系的严谨性.

3. 学生反馈

课后笔者作了大量的跟踪调查，学生们对本节课中的各个环节都作了评价.

(1) 对于用手电筒照射球的实验过程，74%的同学认为能激发他们的探究兴趣，26%的同学认为自己可以想象，不需要具体做这个实验.

球在倾斜阳关的照射下，在地面上产生椭圆型轮廓，这是生活中很常见的现象，这就是学生学习椭圆的认知基础. 本节课从垂直照射到倾斜照射，影子从圆变成椭圆，圆上的点到切点的距离是定值，到椭圆上的点到切点的距离不是定值. 这种认知冲突正是学生的学习兴趣的起源.

(2) 对于书本上"两个钉子、一根绳子"的椭圆画法的来历，83%的学生认为很有必要了解，通过丹德林双球实验更能理解椭圆焦点的产生过程，更能理解书本上椭圆的画法.

(3) 关于课堂上得出椭圆定义的过程，64%

(下转第4-40页)

从偶然中发现必然

——一道向量最值问题引发的思考

201505 上海市亭林中学 李 响 顾卓妍

1. 问题的起源

在学完向量的数量积后, 一位学生告诉笔者他的一个小发现与疑惑: 已知向量 $\overrightarrow{a}=(2,1)$, $\overrightarrow{b}=(1,2)$, $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ 的最小值与 $\left|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$ 的最小值相等. 这相等的关系是偶然还是有内在的必然联系呢? 笔者想这不正是一个难得的探究问题吗? 这也是让学生自主探索的好机会. 于是抱着尝试的态度, 在课堂上选取了如下问题, 把问题抛给学生.

问题1 已知 $|\overrightarrow{a}|=1$, $\left|\overrightarrow{b}\right|=2$, 夹角为 $60°$, 求 $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ 与 $\left|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$ 的最小值.

解: $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2=\overrightarrow{a}^2+2t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t^2\overrightarrow{b}^2=4t^2+2t+1$, 所以当 $t=-\frac{1}{4}$ 时, 取得最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\left|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2=t^2\overrightarrow{a}^2+2t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}^2=t^2+2t+4$, 所以当 $t=-1$ 时, 取得最小值为 $\sqrt{3}$.

之后笔者提出下列问题:

(1) 本题应用了什么数学思想方法? (学生答: 函数思想方法)

(2) 如果将问题1中向量 $\overrightarrow{b}$ 的模改为3, $\overrightarrow{a}$ 的模不变呢?

学生求得当 $t=-\frac{1}{6}$ 时, $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 当 $t=-\frac{3}{2}$ 时, $\left|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$ 的最小值是 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(3) 我们发现 $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ 的最小值不变, 而 $\left|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$ 的最小值不同. 这是巧合还是必然呢?

学生流露出渴求和疑惑的眼神, 许多学生跃跃欲试, 有学生继续更改向量 $\overrightarrow{b}$ 的模, 发现 $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ 最小值仍然保持不变, 变化的还是 $\left|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$ 的最小值, 于是提出如下新的问题:

问题2 非零向量 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角为 θ, $|\overrightarrow{a}|=m$ (m 为常数), 则 $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ 的最小值为定值.

2. 新问题的探究

探究1 教师鼓励学生先从特殊情况出发, 从中得到启发后, 在师生的共同努力下, 得到了新问题的解答. 过程如下:

设 $|\overrightarrow{a}|=m$, $\left|\overrightarrow{b}\right|=n$ (m、n 为正实数),

$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2=\overrightarrow{a}^2+2t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t^2\overrightarrow{b}^2=n^2t^2+2mn\cos\theta\cdot t+m^2$.

此函数是关于 t 的开口向上的二次函数, 所以在对称轴处取得最小值.

当 $t=-\frac{m}{n}\cos\theta$ 时, $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2$ 取得最小值.

$$\left(\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2\right)_{\min}$$
$$=n^2\left(-\frac{m}{n}\cos\theta\right)^2+2mn\cos\theta\cdot\left(-\frac{m}{n}\cos\theta\right)+m^2$$
$$=m^2(1-\cos^2\theta)=m^2\cdot\sin^2\theta.$$

因为 $\theta\in[0,\pi]$, 所以 $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ 的最小值为定值 $m\cdot\sin\theta$.

这是利用函数的思想方法, 严格地证明了我们的问题, 而且也验证了问题1. 如果问题就此打住, 那么就有点可惜了. 由于向量源于图形, 与图像的联系很紧密, 教师接着追问, 能否用数形结合的思想方法, 给出合理的解释呢?

探究2 我们再回到问题1, 如图1, 根据结论, $\left(\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|\right)_{\min}=1\times\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 利用函数

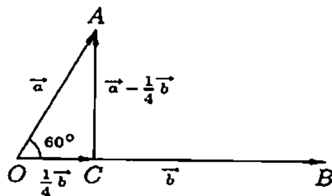


图1

解得当$t=-\frac{1}{4}$时, $\left(\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\right)_{\min}=\left|\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}\right|$.

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\vec{b}$, 所以$\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, 从图1清晰地看出$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$的最小值是点$A$到直线$OB$的距离, 这符合几何定理: 直线外一点到直线上点的连线段中垂线段最短. 数与形达到了统一, 学生更能深刻的理解新问题.

结论1 非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ, $|\vec{a}|=m$(m为常数), 则$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$的最小值的几何意义为向量$\vec{a}$的终点到向量$\vec{b}$的距离.

3. 问题的推广

由结论1, 同理可得$\left|t\vec{a}+\vec{b}\right|$的最小值为$n\cdot\sin\theta$, 几何意义是向量$\vec{b}$的终点到向量$\vec{a}$的距离. 下面我们自然想到, 若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$均有未知的系数, 又会是什么情况呢? 即讨论$\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|$的最值.

问题3 已知$|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, 夹角为$45°$, 求$\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|$的最值, 其中$1\leqslant x\leqslant 2, -1\leqslant y\leqslant 2$.

解析: 此时若利用函数思想方法, 我们需要求解二元函数的最值, 超出学生现有知识范围, 若借助图像能否直观地帮助我们解题呢?

如图2, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OA_1}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1}=-\vec{b}$, $\overrightarrow{OB_2}=2\vec{b}$. 因为$\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|=\left|x\vec{a}-\left(-y\vec{b}\right)\right|$, 所以$\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|$的取值范围为线段$AA_1$上的动点$P$与线段$B_1B_2$上的动点$Q$之间连线$PQ$的长度的范围. 因此, $\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|$的最小值为线段$AC$的长度$\sqrt{2}$, 最大值为线段$A_1B_1$、$A_1B_2$、$AB_2$中长度最大的, 即$\left(\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|\right)_{\max}=\max\{A_1B_1, A_1B_2, AB_2\}$. 利用余弦定理,

$A_1B_1=\sqrt{4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos135°}=\sqrt{25+12\sqrt{2}}\approx6.5$,

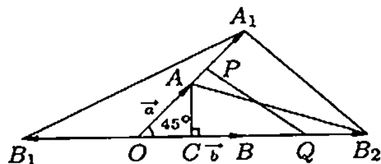


图 2

$A_1B_2=\sqrt{4^2+6^2-2\times4\times6\times\cos45°}=\sqrt{52-24\sqrt{2}}\approx4.2$,

$AB_2=\sqrt{2^2+6^2-2\times2\times6\times\cos45°}=\sqrt{40-12\sqrt{2}}\approx4.8$,

所以$\left(\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|\right)_{\max}=\sqrt{25+12\sqrt{2}}$.

受到问题3的启发, 又有学生提出: 我们可以利用向量法求解二元函数的最值问题.

问题4 已知$1\leqslant x\leqslant 2, -1\leqslant y\leqslant 1$, 求函数$S=x^2-2xy+4y^2$的最值.

解: 由题意, 令$|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$120°$, 则$S=\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|^2$, 由图3得

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OA_1}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1}=-\vec{b}$, 所以$\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|$的最小值为线段$AC$的长度$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 最大值为线段$A_1B$的长度$2\sqrt{3}$, 因此$S$的最小值为$\frac{3}{4}$, 最大值为12.

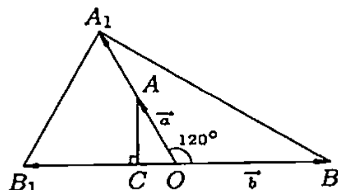


图 3

4. 后记

新课程标准强调以学生发展为本, 确立学生学习的主体地位这一基本理念, 关注学生的学习过程, 教师应帮助学生在学习过程中感悟、体验、建构并丰富学习经验, 实现知识传承、能力发展、积极情感形成的统一. 倡导学生的自主探究、实践体验、合作交流的学习方式与接受性学习方式的有机结合, 发展学生的创新意识.

教师的任务不仅是让学生学到知识, 更重要的是学会获取知识. 在日常教学中, 只要做一个有心人, 我们身边的探究问题随处可见, 通过探究, 学生的思维得到了锻炼, 体验了成功的乐趣, 通过合作, 也培养了学生的协作精神.

参考文献

[1] 上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会. 数学高中二年级第一学期[M]. 上海: 上海教育出版社. 2007年8月第2版.

[2] 上海市教育委员会. 上海市中小学数学课程标准[M]. 上海: 上海教育出版社. 2006年.

一道函数题的反思

400715　西南大学数学与统计学院　陈朝东

在近期学院研究生讨论会上, 一道中学函数题的错解激起了大家的讨论, 并引起了笔者对"数形结合"思想的应用和解题认识的思考. 此题如下(本文省略对函数周期性的呈现讨论):

已知: 以4为周期的函数,

$$f(x)=\begin{cases} m\sqrt{1-x^2}, & (-1\leqslant x\leqslant 1),\\ 1-|x-2|, & (1<x\leqslant 3),\end{cases}$$

其中$m>0$, 若方程$3f(x)=x$恰有5个实数解, 则m的取值范围是 ……………………………… ( )

(A) $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},\dfrac{8}{3}\right)$; (B) $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{7}\right)$;

(C) $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$; (D) $\left(\dfrac{4}{3},\sqrt{7}\right)$.

一、错误解呈现

首先, 由$3f(x)=x$知$f(x)=\dfrac{x}{3}$, 则令$g(x)=\dfrac{x}{3}$, 问题转化为求$f(x)=g(x)$恰有5个实数解时m的取值范围.

其次, 运用数形结合的思想, 将抽象的函数问题通过图像来讨论, 如图1、图2.

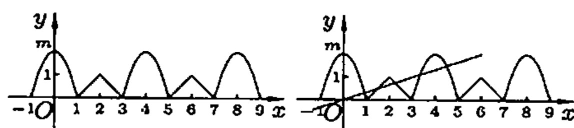


图1　　图2

由图2可知, 在$[-1,1]$中, $g(x)$与$f(x)$有1个交点; 在$(1,3]$中, $g(x)$与$f(x)$有2个交点; 所以, 只需讨论$(3,5]$中的交点数, 即$f(4)>g(4)$保证$g(x)$与$f(x)$在区间$(3,5]$中有2个交点. 解不等式$f(4)>g(4)$, 得$m>\dfrac{4}{3}$. 对应选项发现m的取值有上限, 进一步完善$g(x)$的图像来帮助分析("延长"所作的$g(x)$直线).

由图3, 不禁发现m的取值上限来源: $f(8)<g(8)$ (在$(5,7]$显然无交点), 不等式解得$m<\dfrac{8}{3}$, 综上所述$m\in\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$, 对应选项为(C).

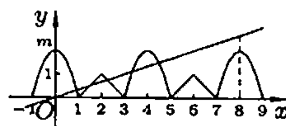


图3

当同学讲解完此题时, 在座的朋友们仿佛对她的讲解感到很自然、很美好, 而且选项(C)也非常地和谐. 当讲解同学看着大家如此沉默后, 突然说道: "选项(C)很美好, 但却是错选项, 正确选项为(B)!"顿时, 同学们陷入了疑惑的讨论. 笔者也不禁自问: 为何错了? 错在哪里? 为何错得如此美好, 如此让人毫无察觉?

二、正解错中来

让我们再次对错题中区间$(7,9]$中的限制条件进行分析(区间$(3,4]$同理): $g(8)>f(8)$的解$m<\dfrac{8}{3}$是错的, 相对正确解$m<\sqrt{7}$来说限制向左移动, 为什么呢? 让我们对区间$(7,9]$内的图形放大(只限于该区间讨论):

由图4可知, 当$g(8)=f(8)$时, $g(x)$与$f(x)$并非相切于1个点, 而是相交于2个点(其中1个交点为顶点), 所以用$g(8)>f(8)$去限制是不正确的, 而应该去寻找相切的情形.

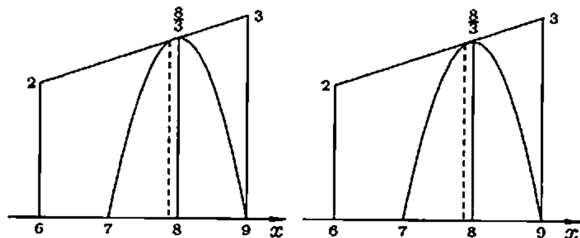


图4　　图5

由图5可知, 当$g(x)$与$f(x)$相切时, 切点并非在$x=8$处, 而是在其左侧, 所以切点的函数值$y<\dfrac{8}{3}$, 进而可以排除选项中m取值区间的右端点为$\dfrac{8}{3}$的选项. 同理左端点也应该在$\dfrac{4}{3}$的左

侧，即左端点为 $\frac{4}{3}$ 的选项也应该排除，易知正确选项为(B).

从"数形结合"方法的实施上讲，错误解是由于未能清楚地作出图像之间的关系，从而对不准确的函数图象进行分析求解，陷入了直观误区：将临界点、切点、顶点混淆在一起．从解题技巧上讲，本题可以通过错误解来排除选项，所以本题的错误解是排除错误选项的积极、高效的方法．

三、正确解分析

从题目开始重新思考，同样运用"数形结合"的思想分析．首先，充分认识题目，尤其是辨析已知中的"定条件"和"变条件"：

<table>
<tr><td rowspan="4">条件</td><td rowspan="2">定条件</td><td>$f(x)=1-|x-2|\,(1<x<3)$ (周期为4)</td></tr>
<tr><td>$3f(x)=x$ 恰有5个实数解
$\Longrightarrow$ 令 $g(x)=\frac{x}{3}$, $f(x)=g(x)$ 恰有5个实数解</td></tr>
<tr><td rowspan="2">变条件</td><td rowspan="2">$f(x)=m\sqrt{1-x^2}\,(-1\leqslant x\leqslant 1), m>0$ (周期为4)</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td colspan="2">问　题</td><td>m 的取值范围</td></tr>
</table>

其次，运用"数形结合"的思想方法，作出函数图形：呈现顺序应该是"先定再变"，因为定条件是确定的图像，而变条件是不确定的图像(即需要讨论)，所以先呈现"定条件"，再呈现"变条件"：

1. 先作确定的 $g(x)$ 图像，如图6;

2. 再作 $f(x)$ 的确定部分，如图7.

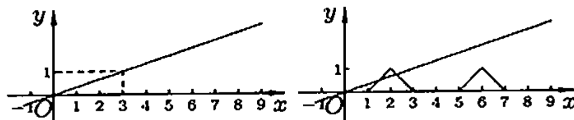
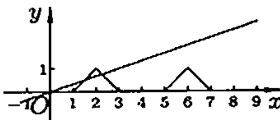



图6　　图7

由定条件图像(图7)可以知道，在区间 $(1,3]$ 中 $g(x)$ 与 $f(x)$ 必然有2个交点，并且 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的确定部分有且只有2个交点.

3. 最后作 $f(x)$ 的不确定部分(只需作变化图像临界状态中的有效部分，如图8).



图8

由图8可知，$g(x)$ 与 $f(x)$ 的关系：(1) 无论 m 为何值，$g(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 中有且只有1个交点；(2) 无论 m 为何值，$g(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 中有且只有2个交点，即在区间 $(0,3]$ 中总有3个交点，所以交点数量的增加是在区间 $(3,+\infty)$ 内进行的.

因此，关于 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有5个交点的讨论转化为"$g(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 中有2个交点的讨论"．由于在区间 $(3,+\infty)$ 中 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的确定部分无交点，即 $g(x)$ 只可能与 $f(x)$ 的不确定部分相交，所以问题再次转化为"$g(x)$ 与 $f(x)$ 的不确定部分在区间 $(3,+\infty)$ 中有2个交点的讨论".

容易发现，在区间 $(3,+\infty)$ 中，$g(x)$ 与 $f(x)$ 每相交1次，增加2个交点；$g(x)$ 与 $f(x)$ 每相切1次，增加1个交点．"相切"是临界状态，"相交"是变化区间，所以"相切"比"相交"更容易把握和确定．进而，我们将问题最终转化为"求解 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的不确定部分在区间 $(3,+\infty)$ 中相切于1个点的情况"：当 $g(x)$ 与 $f(x)$ 相切于 $[3,5]$ 时，共有4个交点；当 $g(x)$ 与 $f(x)$ 相切于 $[7,9]$ 时，共有6个交点；故5个交点的情况在二者之间，即②与④之间(不包括②与④)．故只需求解相切时的 m 值即可.

首先，$g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $(3,5)$ 中相切时，方程组 $\begin{cases} f(x)=m\sqrt{1-(x-4)^2}, \\ g(x)=\frac{x}{3} \end{cases}$ 在 $(3\leqslant x\leqslant 5)$ 内只有一个解，得 $m=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

其次，$g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $(7,9)$ 中相切时，方程组 $\begin{cases} f(x)=m\sqrt{1-(x-8)^2}, \\ g(x)=\frac{x}{3} \end{cases}$ 在 $(7\leqslant x\leqslant 9)$ 内只有一个解，得 $m=\sqrt{7}$．综上所述，$m\in\left(\frac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{7}\right)$，即选择(B).

四、正误对比反思

首先，体现了认识与方法的关系问题．对比正、误解法发现错的根源不在解题方法上，而在对题目本身的认识理解上．学生对题干已知条件的认识是否明确，对定条件和变条件的认识是否充分，对条件与问题的关系是否清晰，将直接影响解题思路和方法，并最终决定过程和结果.

其次，辨析定条件与变条件的重要性．充分认识条件，不仅需要关注条件与问题的关系，还需要深入理解条件内部的关系．对于有定量与变量的条件情形，区别两者并认识两者的关系是

构造长方形求自然数幂和

466001 河南省周口市川汇区教体局教研室 李世臣 河南省周口市川汇区教师进修学校 苏久霞

形如$S_p(n)=1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p\,(p\in\mathbf{N}^*)$的和式称为自然数幂和, 也称为$p$阶自然数幂. 自然数幂和公式有着非常精彩的发展历史. 低阶自然数幂和公式有许多种奇思妙解, 相关的数学家的智慧依然为我们今天的数学学习提供了很好的借鉴, 仍然能激励我们变更新视角、尝试新证法, 在享受数学美的过程中, 将问题研究继续下去. 长方形是最简洁、最直观的基本图形. 构建基于长方形的自然数幂和几何模型, 采用面积重算原理, 能自然、流畅地呈现低阶自然数幂和的推理过程.

(1) $S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

如图1, 一个长方形被分为n行和n列, 底边的一行数字表示对应的列宽, 左侧一列数字表示对应的行高, 每一个拐角六边形的面积等于拐角处的数字, 即

$$\frac{1}{2}(\underbrace{1+\cdots+1}_{i}+\underbrace{1+\cdots+1}_{i-2})+1=i.$$

一方面, 拐角六边形的面积和等于$1+2+3+\cdots+n$; 另一方面, 大长方形的面积等于

$$(\underbrace{1+\cdots+1}_{n})\left(1+\underbrace{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n-1}\right)=n\times\frac{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

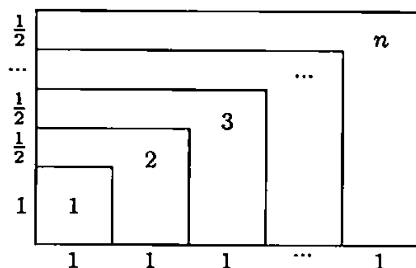


图 1

所以$S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

解题的关键. 例如, 本题$f(x)$中含有参数m, 故解题分析中必然含有对参数的讨论, 而错误解未能很好地认识定条件与变条件, 从而忽视了对参数m的讨论.

再者, 反应了“数形结合”思想的直观误区. 错误解是由认识不充分所决定, 而错误解不易发现是因为“数形结合”的直观误导所决定. 图形直观是“数形结合”的优点, 同时也是导致直观误导的缺点. 学生只有充分认识题干后, 才能有效地实施“数形结合”的方法; 学生只有清楚地作出图像, 了解其关系, 才能准确地把握问题. 例如, 在作函数图象的顺序上, 错误解先作$f(x)$, 即把不确定的$f(x)$先定下来, 再作$g(x)$讨论, 问题变成了确定条件的求解问题; 当发现结果与选项不匹配时, 思考、变动$g(x)$图像来满足讨论需要, 未发现问题本质, 而只是在直观形式上变化; 然而, 正确解中体现了“从已知到未知”、“从确定到不确定”的作图过程, 这正是“数形结合”思想方法的有效方式, 也是问题解决的一般认知策略.

所以, 为了在解题前, 对题目有充分的认识, 体现认识的有序性和解题的计划性, 特归纳总结了“解题前奏表”. 认识的有序性、计划性直接影响解题策略的有序性、有效性. “解题前奏表”的原则是体现认知规律: “从已知到未知”、“从确定到不确定”、“从熟悉到不熟悉”. 认识与实践的策略, 即读题、解题的步骤为: ① $\Longrightarrow$ ② $\Longrightarrow$ ③ $\Longrightarrow$ ④; ① + ② + ③ $\Longrightarrow$ ④.

已知	条件	定条件	熟悉	①
			不熟悉 ⟹ 熟悉	②
		变条件		③
未知	问题			④

注意: ② 中需要转化, 即将不熟悉的条件“化归”为熟悉的条件; ③ 中需要讨论, 即关键在于“分类讨论”的完备性与有效性. 本题的正确解便是按照“解题前奏表”展开实施的.

(2) $S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

如图2, 一个长方形被分为n行和n列, 底边的一行数字表示对应的列宽, 左侧一列数字表示对应的行高, 每一个拐角六边形的面积等于拐角处的数字, 即

$$\frac{2}{3}\times(1+2+\cdots+i)+i\times\left(1+\underbrace{\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{3}}_{i-2}\right)$$
$$=\frac{i(i+1)}{3}+\frac{i(2i-1)}{3}=i^2.$$

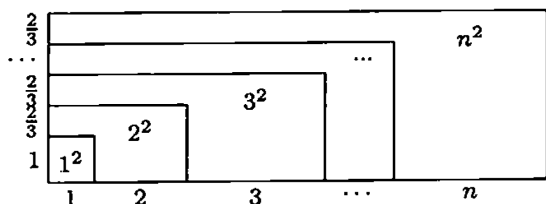


图 2

一方面, 拐角六边形的面积和等于$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$; 另一方面, 大长方形的面积等于

$$(1+2+\cdots+n)\times\left(1+\underbrace{\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{3}}_{n-1}\right)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{2n+1}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

所以$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(3) $S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

如图3, 一个长方形被分为n行和n列, 底边的一行数字表示对应的列宽, 左侧一列数字表示对应的行高, 每一个拐角六边形的面积等于拐角处的数字, 即$i(1+2+\cdots+i)+i[1+2+\cdots+(i-1)]=\dfrac{i^2(i+1)}{2}+\dfrac{(i-1)i^2}{2}=i^3$.

一方面, 拐角六边形的面积和等于$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$; 另一方面, 大长方形的面积等于$(1+2+\cdots+n)\times(1+2+\cdots+n)=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

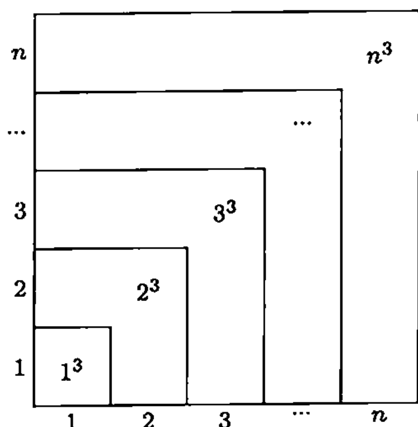


图 3

所以$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

(4) $S_4(n)=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$
$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

如图4, 一个长方形被分为n行和n列, 底边的一行数字表示对应的列宽, 左侧一列数字表示对应的行高, 每一个拐角六边形的面积等于拐角处的数字, 即

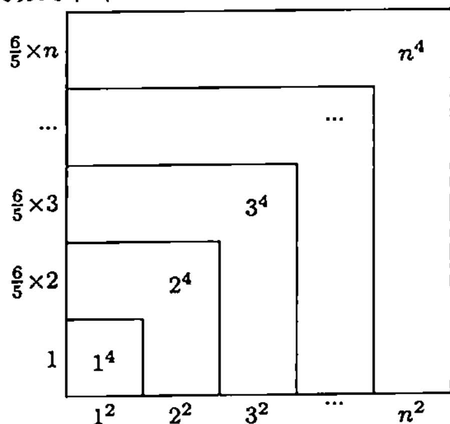


图 4

$$\frac{6}{5}\times i\times(1^2+2^2+\cdots+i^2)$$
$$+i^2\times\left\{1+\frac{6}{5}[2+3+\cdots+(i-1)]\right\}$$
$$=\frac{6}{5}\times i\times\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$$
$$+i^2\times\left[1+\frac{6}{5}\left(\frac{(i-1)i}{2}-1\right)\right]$$
$$=\frac{i^2(2i^2+3i+1)}{5}+\frac{i^2(3i^2-3i-1)}{5}=i^4.$$

一方面, 拐角六边形的面积和等于$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$; 另一方面, 大长方形的面积等于

$$(1^2+2^2+\cdots+n^2)\times\left[1+\frac{6}{5}(2+3+\cdots+n)\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \left[1+\frac{6}{5}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\right]$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{3n^2+3n-1}{5}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

所以$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

(5) $S_5(n) = 1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5$
$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

如图5, 一个长方形被分为n行和n列, 底边的一行数字表示对应的列宽, 左侧一列数字表示对应的行高, 每一个拐角六边形的面积等于拐角处的数字, 即

$$\frac{4}{3}\times i\times(1^3+2^3+\cdots+i^3)$$
$$+i^3\times\left\{1+\frac{4}{3}[2+3+\cdots+(i-1)]\right\}$$
$$= \frac{4}{3}\times i\times\frac{i^2(i+1)^2}{4}$$
$$+i^3\times\left\{1+\frac{4}{3}\left[\frac{(i-1)i}{2}-1\right]\right\}$$
$$= \frac{i^3(i+1)^2}{3}+i^3\times\frac{2i^2-2i-1}{3}$$
$$= i^5.$$

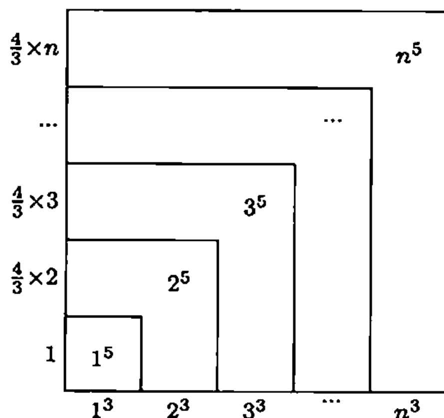


图 5

一方面, 拐角六边形的面积和等于$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5$; 另一方面, 大长方形的面积等于

$$(1^3+2^3+\cdots+n^3)\times\left[1+\frac{4}{3}(2+3+\cdots+n)\right]$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\times\left[1+\frac{4}{3}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\right]$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\times\frac{2n^2+2n-1}{3}$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

所以$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5$
$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

观察图1、图2, 两个几何模型都是由p阶自然数幂作底构造图形求$p+1$阶自然数幂和, 对于高阶的自然数幂和是否也可以这样构造呢?

如图6, 以p阶自然数幂为底边, 左侧的常数(k待定)表示行高, 我们逆向思考问题, 假设第i个拐角六边形的面积为i^{p+1}, 于是

$$k(1^p+2^p+3^p+\cdots+i^p)+i^p[1+k(i-2)] = i^{p+1},$$
$$\therefore [S_p(i)+i^p(i-2)]k = i^p(i-1),$$
$$\therefore k = \frac{i^p(i-1)}{S_p(i)+i^p(i-2)}.$$

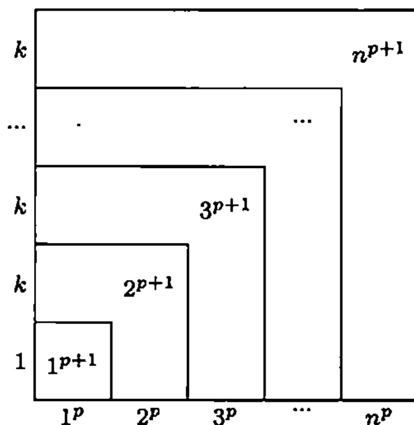


图 6

赋予p不同的整数值, 求得相应的k值, 汇总得到下表1.

表1

p	0	1	2	3	4	…
k	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{6i}{8i-1}$	$\frac{4i}{5i-1}$	$\frac{30i^3}{36i^3-9i^2+i+1}$	…

从表1中的数据看出, 能用这种方法求和的只有$S_1(n)$和$S_2(n)$.

对于图3、图4、图5三个几何模型, 它们都是由p阶自然数幂作底构造图形求$p+2$阶自然数幂和, 我们用同样的方法对高阶自然数幂作如下探索.

如图7, 以p阶自然数幂为底边, 左侧的常数(k待定)表示行高, 假设第i个拐角六边形的面积为i^{p+2}. 于是

$ikS_p(i) + i^p\{1 + k[2 + 3 + \cdots + (i-1)]\}$
$= i^{p+2}$,
$\therefore \{iS_p(i) + i^p[2 + 3 + \cdots + (i-1)]\}k$
$= i^p(i^2 - 1)$,
$\therefore [2iS_p(i) + i^p(i-2)(i+1)]k$
$= 2i^p(i^2 - 1)$,
$\therefore k = \dfrac{2i^{p-1}(i^2-1)}{2S_p(i) + (i-2)(i+1)i^{p-1}}$.

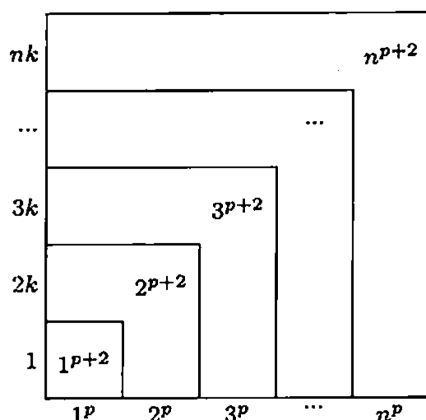


图 7

赋予p不同的整数值, 求得相应的k值, 汇总得到下表2.

表2

p	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
k	$\frac{2i+2}{3i+2}$	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{30i^2}{1+21i^2}$	$\frac{12i^2}{1+8i^2}$	$\cdots$

由表2可知, 这种构造方法只适用于$S_3(n)$、$S_4(n)$、$S_5(n)$.

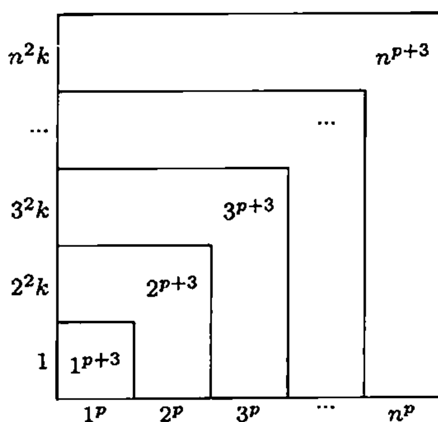


图 8

顺着这种思路, 我们由p阶自然数幂作底构造图形求$p+3$阶自然数幂和, 于是作如下尝试.

如图8, 以p阶自然数幂为底边, 左侧的常数(k待定)表示行高, 假设第i个拐角六边形的面积为n^{p+3}. 于是

$i^2kS_p(i) + i^p\{1 + k[2^2 + 3^2 + \cdots + (i-1)^2]\}$
$= i^{p+3}$,
$\therefore \{[i^2S_p(i) + i^p[S_2(i) - i^2 - 1]\}k$
$= i^p(i^3 - 1)$,
$\therefore k = \dfrac{i^p(i^3-1)}{i^2S_p(i) + i^p[S_2(i) - i^2 - 1]}$.

赋予p不同的整数值, 求得相应的k值, 汇总得到下表3.

表3

p	0	1	2
k	$\frac{6i^2+6i+6}{8i^2+5i+6}$	$\frac{6i^2+6i+6}{5i^2+5i+6}$	$\frac{3i^2+3i+3}{2i^2+2i+3}$

p	3	4	$\cdots$
k	$\frac{12i^2+12i+12}{7i^2+7i+12}$	$\frac{30i^3+30i^2+30i}{16i^3+16i^2+31i+1}$	$\cdots$

由表3可以看出, 不存在这样的常数k使得这种构造方法成立.

综上可知, 上述构造方法具有局限性, 不能推广到一般情况. 换一种构造思路, 要求$S_p(n)$, 则把所有比它小的低阶自然数幂和都考虑进去, 经过探究发现一个重要的几何模型.

如图9, 把$S_p(n)$构造成规格为$1^p\times 1$, $2^p\times 1$, $3^p\times 1$, $\cdots$, $n^p\times 1$的长方形的组合, 在其上部依次补充规格为$(2^p-1^p)\times 1$, $(3^p-2^p)\times 2$, $(4^p-3^p)\times 3$, $\cdots$, $[(n+1)^p-n^p]\times n$大小的长方形, 整个图形是由原有部分和补充部分构成的$(n+1)^p\times n$长方形.

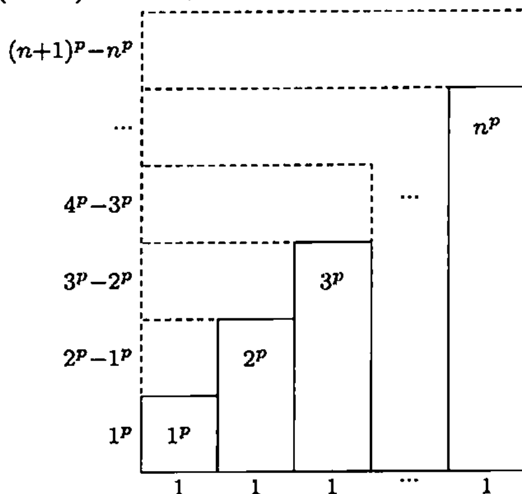


图 9

根据面积重算原理, 则

$n(n+1)^p = S_p(n) + \sum\limits_{i=1}^{n}[(i+1)^p - i^p]\times i$

$= S_p(n) + \sum\limits_{i=1}^{n}[C_p^{p-1}i^p + C_p^{p-2}i^{p-1}$

数列中的连续项及隔项问题解法探究

442001 湖北省十堰市东风高级中学 吕 辉

在数列中, 有这样一类求数列通项公式题目, 已知连续项或隔项数列递推式, 求其通项. 这类题的解法一般比较复杂. 笔者经过认真思考, 发现此类题的规律, 现作此拙文供读者赏析.

1. 连续项问题

1.1 含有“$a_{n+1}+a_n$”

例1 已知数列$\{a_n\}$, $a_{n+1}+a_n=2^{n+1}$, 且$a_1=1$, 求a_n.

解法1: $a_{n+1}+a_n=2^{n+1}$, ……………………(1)

$a_{n+2}+a_{n+1}=2^{n+2}$. ……………………(2)

(2) − (1) 得$a_{n+2}-a_n=2^{n+1}$.

① 当$n=2k-1\,(k\in\mathbf{N}^*)$时,

$a_{2k+1}-a_{2k-1}=2^{2k}$,

$$a_{2k-1}=a_1+(a_3-a_1)+(a_5-a_3)+(a_7-a_5)+\cdots+(a_{2k-1}-a_{2k-3})$$

$$=1+2^2+2^4+2^6+\cdots+2^{2(k-1)}=\frac{2^{2k}-1}{3},$$

此时$a_n=\dfrac{2^{n+1}-1}{3}$ (n为奇数).

② 当$n=2k\,(k\in\mathbf{N}^*)$时, $n-1$为奇数,

$$a_n=2^n-a_{n-1}=2^n-\frac{2^n-1}{3}=\frac{2^{n+1}+1}{3}$$

(n为偶数).

$$\therefore a_n=\begin{cases}\dfrac{2^{n+1}-1}{3}, & n=2k-1,\\ \dfrac{2^{n+1}+1}{3}, & n=2k,\end{cases}\quad(k\in\mathbf{N}^*).$$

解法2: $(-1)^{n+1}(a_{n+1}+a_n)=(-1)^{n+1}2^{n+1}$,

$\therefore (-1)^{n+1}a_{n+1}-(-1)^n a_n=(-2)^{n+1}$.

令$b_n=(-1)^n a_n$,

$$\therefore b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1}),$$

$$\therefore b_n=-1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^n=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}(-2)^{n-1},$$

$$\therefore a_n=\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{3}.$$

点评: 此题出现了$a_{n+1}+a_n$连续两项相加, 其常规解法就是对n进行奇偶性讨论, 直观可行, 但分奇偶后变为隔项问题, 很容易出错. 巧妙解法通过变形, 使其成为我们常见的形式, 此题也就迎刃而解, 形如: $a_{n+1}+a_n=f(n)$的数列通项公式都可采用此法求解.

1.2 含有“$a_{n+1}\cdot a_n$”

例2 设$\{a_n\}$是首项为1的正项数列, 且$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$, 求$a_n$.

解: $n(a_{n+1}^2-a_n^2)+a_{n+1}(a_{n+1}+a_n)=0$,

$\because a_n>0$, $\therefore n(a_{n+1}-a_n)+a_{n+1}=0$,

$\therefore (n+1)a_{n+1}=na_n$,

$\therefore na_n$为常数列, $\therefore a_n=\dfrac{1}{n}$.

例3 设$\{a_n\}$是首项为1, 且$a_{n+1}-a_n+a_{n+1}a_n=0$, 求a_n.

解: 将$a_{n+1}-a_n+a_{n+1}a_n=0$两边同除以$a_{n+1}a_n$,

$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$, $\therefore \left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$为等差数列,

(下转第4-45页)

$$+\cdots+C_p^1 i^2+C_p^0 i]$$

$$=S_p(n)+C_p^{p-1}\sum_{i=1}^n i^p+C_p^{p-2}\sum_{i=1}^n i^{p-1}+\cdots+C_p^1\sum_{i=1}^n i^2+C_p^0\sum_{i=1}^n i$$

$$=(1+p)S_p(n)+C_p^{p-2}S_{p-1}(n)+\cdots+C_p^1S_2(n)+C_p^0S_1(n).$$

即$S_p(n)=\dfrac{1}{1+p}\{n(n+1)^p-[C_p^{p-2}S_{p-1}(n)+\cdots+C_p^1S_2(n)+C_p^0S_1(n)]\}$.

显然, 只要知道$S_1(n)$, $S_2(n)$, $\cdots$, $S_{p-1}(n)$, 代入上式就可以求出$S_p(n)$了.

参考文献

[1] 汪晓勤, 蒲淑萍. 阿拉伯数字文献中的数列求和公式[J]. 数学教学, 2010(3), 30−34.

一类向量系数和的取值范围的简捷解法

518126 广东省深圳市富源学校 吕辉忠

在近年的高考题及各地的模拟试题中，多处出现求向量的系数和取值范围的问题，而且以小题的形式出现，需要“巧解、快解”，但绝大部分给出的解法是转化为线性规划的问题来解，经常遇到约束不等式非常复杂，而且即使得出约束不等式的可行域，但求出目标函数的范围难度很大，费时费力，解题效率不高. 本文用向量的几何知识及简单的平面几何知识，简单快捷地解决这类问题.

一、重要的结论

如图1，平面内的两条相交直线OP_1和OP_2将该平面分割成四个部分Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，设$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OP_1}+n\overrightarrow{OP_2}$，则可以得到如下结论：

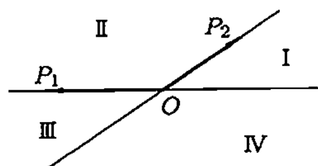


图1

(1)若点P落在P_1P_2所在的直线上时，则有$m+n=1$，该结论就是课本中关于平面向量三点共线的一个重要结论. 进一步拓展后，我们容易获得如下结论：

(2)若点P落在P_1P_2所在的直线的上方时，设直线OP交P_1P_2于H点，设$\lambda=\dfrac{|OP|}{|OH|}$，则有$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OH}$，设$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OP_1}+t\overrightarrow{OP_2}$，$H$、$P_1$、$P_2$三点共线，且$s+t=1$. 从而，$\overrightarrow{OP}=\lambda\left(s\overrightarrow{OP_1}+t\overrightarrow{OP_2}\right)=m\overrightarrow{OP_1}+n\overrightarrow{OP_2}$，得到结论$m+n=\lambda=\dfrac{|OP|}{|OH|}$，显然此时$m+n>1$；

(3)同理，若点P落在P_1P_2所在的直线的下方，但位于过点O且平行P_1P_2的直线的上方时，则$0<m+n<1$；

若点P落在过点O且平行P_1P_2的直线上时，有$m+n=0$；

若点P落在过点O且平行P_1P_2的直线的下方时，有$m+n<0$；

综上所述，当点P落在区域Ⅱ时(可以包括边界)，有$m+n=\lambda=\dfrac{|OP|}{|OH|}$，其中点$H$为直线$OP$与$P_1P_2$的交点，且当点$P$落在直线$P_1P_2$上时，有$m+n=1$；点$P$落在直线$P_1P_2$的上方时，有$m+n>1$；点$P$落在直线$P_1P_2$的下方时，有$0\leqslant m+n<1$. 这是个非常重要的结论(针对其它区域可得相应的结论)，尤其在解决下列问题非常简捷：设向量$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OP_1}+n\overrightarrow{OP_2}$，且点$P$在题设条件所给的区域运动时，求$am+bn$($a$、$b$为给定的常数)的范围. 下面举近年的高考试题来说明如何应用！

二、例题示范

例1 (2006年湖南省高考理科第15题) 如图2，$OM/\!/AB$，点P在由射线OM，线段OB及AB的延长线围成的区域内(不含边界)运动，且$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则$x$的取值范围是______；当$x=-\dfrac{1}{2}$时，$y$的取值范围是______.

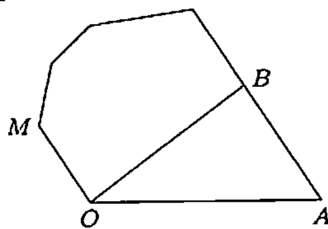


图2

解：点P在由射线OM、线段OB及AB的延长线围成的区域内，利用上述结论，我们有：

$$\begin{cases}x<0,\\ y>0,\\ 0<x+y<1.\end{cases}$$

易得x的取值范围是$x<0$. 当$x=-\dfrac{1}{2}$时，$\dfrac{1}{2}<y<\dfrac{3}{2}$.

例2 (2009年安徽省理科第14题)给定两个长度为1的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为120°. 如图3，点C在以O为圆心的圆弧$\overset{\frown}{AB}$上变动. 若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中$x$、$y\in\mathbf{R}$，则$x+y$的最大值是________.

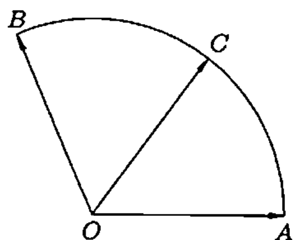


图3

解：由上述结论有$x+y=\dfrac{|OC|}{|OH|}$，其中点H为OC与AB的交点，显然$x+y$取最大值，只需OH最小，故OH垂直于AB时即为所求，易求得此时$OH=\dfrac{1}{2}$，所以$x+y$的最大值是2.

例3 如图4，已知点G是$\triangle ABC$的重心，点F是$\triangle GBC$内一点，若$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu$的取值范围______.

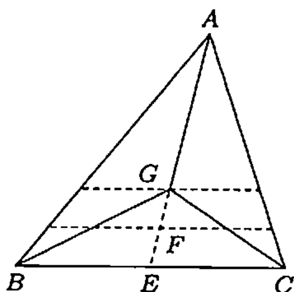


图4

解：由上述结论有$\lambda+\mu=\dfrac{|AF|}{|AE|}$，平行于$BC$的点比值都是相等的，所以范围决定于$AF$长度，$|AG|<|AF|<|AE|$，所以易得$\lambda+\mu$的取值范围是$\left(\dfrac{2}{3},1\right)$.

例4 在直角梯形$ABCD$中，AB垂直AD，$AD=DC=1$，$AB=3$，动点P在以C为圆心，且与直线BD相切的圆内运动，设$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AD}+m\overrightarrow{AB}$，则$t+m$的取值范围是……( )

(A) $\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$； (B) $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{3}\right)$；

(C) $\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$； (D) $\left(1,\dfrac{5}{3}\right)$.

解：由上述结论有$t+m=\dfrac{|AP|}{|AE|}$ (E为直线AP与BD的交点)，过点P作与BD平行直线l，过点A作AG垂直于l交l于点G，交BD于点H，如图5. $t+m=\dfrac{|AP|}{|AE|}=\dfrac{|AG|}{|AH|}$，平面几何知识得$|AH|=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，所以$t+m$的取值范围决定于$AG$长度范围，由相似比得到圆$C$的半径为$\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$AG$长度范围为$\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}},\dfrac{5}{\sqrt{10}}\right)$，所以$t+m$的取值范围是$\left(1,\dfrac{5}{3}\right)$.

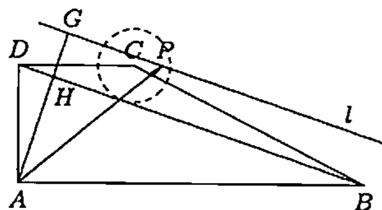


图5

例5 如图6，在正方形$ABCD$中，E为AB的中点，点P为以A为圆心，AB为半径的圆弧上的任意一点，设向量$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{DE}+\mu\overrightarrow{AP}$，则$\lambda+\mu$的最小值为______.

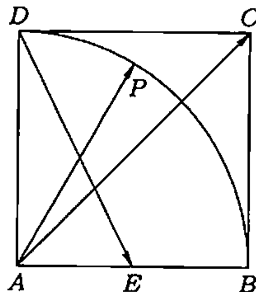


图6

解：将向量$\overrightarrow{DE}$平移到A为起点的向量$\overrightarrow{AF}$，设FP与AC交于点G，则$\lambda+\mu=\dfrac{|AC|}{|AG|}$，所以，当$AG$长度最大时，$\lambda+\mu$取得最小值，显然当点$P$与点$B$重合时，$AG$最大，由平面几何知识得，此时$C$为$AG$中点，故$\lambda+\mu$的最小值为$\dfrac{1}{2}$.

以上范例是针对所求范围的式子系数均为1(相等也可)，若不相等呢？例如例3所求的问题变成求$\lambda+4\mu$的范围？实际上，只需要取AC的四分之一点，得到点C'，转化成$\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC'}$，则$m+n=\lambda+4\mu$，故只需求$m+n$的范围，下举例说明.

例6 已知O是$\triangle ABC$的外心，$AB=2$，$AC=3$，$x+2y=1$，若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ $(xy\neq0)$，则$\cos\angle BAC=$________.

简解：设$\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC'}$，其中$\overrightarrow{AC'}=$

一个平面几何问题的多种解法

050035 河北省石家庄学院数学系 王玉怀编译

俄罗斯数学杂志《Математика в школе》在教学方法栏目中刊登的文[1], 笔者读后很受启发, 诚如原作者以自己的教学经验体会所谈到的"实践证明, 用不同的方法解一个问题比用一种方法解一些问题的收效较好". 在以下解法中, 尽管某些解法(如应用美奈劳斯定理等)超出我国中学数学教材内容, 笔者仍将它译出, 作为研究性资料供数学教师参考.

题 在等腰直角三角形$\triangle ABC(\angle C=90^\circ)$中, BD是中线, 且$CM\perp BD$(点M在边AB上). 求$\dfrac{AM}{BM}$.

以下解法分为I–VII组.

第I组(应用向量、坐标)

解1: 如图1, 建立平面直角坐标系, 引入向量$\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$.

设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$. $\overrightarrow{CM}$可表示为$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}$, 即$\vec{b}+\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\lambda\overrightarrow{MB}$, 由此得$\overrightarrow{BM}=\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{1+\lambda}$.

其次, $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\vec{b}+\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{1+\lambda}=\dfrac{\vec{a}+\lambda\vec{b}}{1+\lambda}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-\vec{b}+\dfrac{\vec{a}}{2}$.

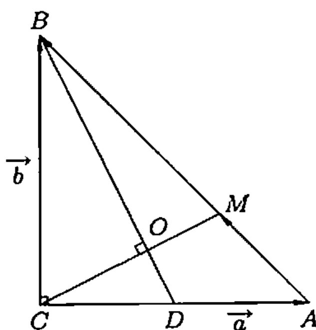


图 1

由条件可知

$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BD}=0$故$\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=0$.

由此注意到$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$及$|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|$, 得$\lambda=\dfrac{1}{2}$, 即$\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$.

解2: 设$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, 那么$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{BM}=\alpha\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$(如图1). 由于$BO=\dfrac{4}{5}BD$, 因

$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 则$m+n=1$, $AB=BC$, 从而$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{4}$.

三、总结

通过上面几道例题, 可归纳出以下几点:

(1) 在遇到形如$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 点$C$在题设所给的区域运动时, 探求$x+y$的范围这类问题时, 不一定按照线性规划的思路来做, 因为线性规划的约束不等式有时很复杂, 况且如果可行域复杂(比如圆或更不规则的几何区域时)要得到约束不等式非常困难, 即使得出可行域, 要求出目标函数的范围有时是不可行的, 我们可以连结AB及OC, OC交AB于点D, 则$x+y=\dfrac{|OC|}{|OD|}$(点C在过点O平行直线AB的上方), 可运用简单的平面几何知识快捷解决.

(2) 在遇到形如$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 点$C$在题设所给的区域运动时, 如果所探求的范围型如$ax+by\,(a>0,b>0)$这样的形式, 可以先设$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA'}+n\overrightarrow{OB'}$, 其中$\overrightarrow{OA'}=\dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=\dfrac{1}{b}\overrightarrow{OA}$, 此时$m+n=ax+by$, 下面只需要求$m+n$的范围即可. 问题转化成(1).

参考文献

[1] 刘绍学. 普通高中课程标准实验教科书数学必修4[M]. 第2版. 北京: 人民教育出版社, 2007.

此$\overrightarrow{BO}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{a}-\frac{4}{5}\overrightarrow{b}$.

此外, $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}$
$=\alpha\overrightarrow{b}-\alpha\overrightarrow{a}+\frac{2}{5}\overrightarrow{a}-\frac{4}{5}\overrightarrow{b}$.

因为$\overrightarrow{MO}\perp\overrightarrow{BO}$, 所以$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BO}=0$, 即$\left(\alpha\overrightarrow{b}-\alpha\overrightarrow{a}+\frac{2}{5}\overrightarrow{a}-\frac{4}{5}\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{a}-\frac{4}{5}\overrightarrow{b}\right)=0$.

由此, 注意到$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$及$\overrightarrow{a}^2=\overrightarrow{b}^2$, 得$\alpha=\frac{2}{3}=\frac{MB}{AB}$, 因此$\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$.

解3: 如图2, 建立平面直角坐标系. 直线AB的方程为$x+y=1$. 点M在AB上, 于是有$M(x,1-x)$. 求得向量$\overrightarrow{CM}$和$\overrightarrow{BD}$的坐标为$\overrightarrow{CM}=(x,1-x)$, $\overrightarrow{BD}=\left(\frac{1}{2},-1\right)$. 因为$\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{BD}$, 因此$\frac{x}{2}+(1-x)(-1)=0$, $x=\frac{2}{3}$, 所以$\frac{AM}{BM}=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{2}$.

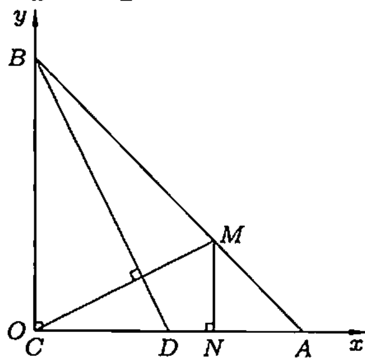


图2

解4: 建立如图2所示的坐标系. 设$\frac{AM}{BM}=\lambda$. 由$A(1,0)$、$B(0,1)$可知$M\left(\frac{1}{1+\lambda},\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$. 求得向量$\overrightarrow{BD}$和$\overrightarrow{CM}$的坐标$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{1}{2},-1\right)$, $\overrightarrow{CM}=\left(\frac{1}{1+\lambda},\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$.

因为$\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{BD}$, 所以$\frac{1}{2(1+\lambda)}-\frac{\lambda}{1+\lambda}=0$, 得$\lambda=\frac{1}{2}$. 所以$\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$.

第II组(应用三角函数)

解5: 设$\angle ACM=\alpha$, 在$\triangle ACM$和$\triangle BCM$中(图3), 由正弦定理, 得
$\frac{AM}{CM}=\frac{\sin\alpha}{\sin 45^\circ}$, $\frac{BM}{CM}=\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin 45^\circ}=\frac{\cos\alpha}{\sin 45^\circ}$, 由此得$\frac{AM}{BM}=\tan\alpha$. 因为$\angle ACM=\angle CBD$, 因此$\tan\alpha=\frac{CD}{BC}=\frac{1}{2}$. 所以$\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$.

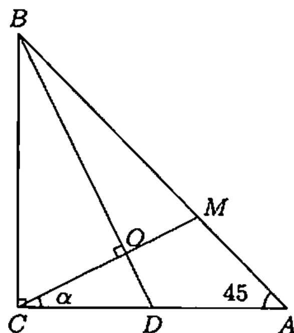


图3

解6: 设$AC=BC=1$, $\angle CBD=\alpha$, $\angle DBA=\beta$. 于是有$\cos\alpha=\frac{BC}{BD}=\frac{BO}{BC}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, 所以$BO=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

对于$\triangle ABD$应用余弦定理, 得$\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$, 那么$BM=\frac{BO}{\cos\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 最后$AM=AB-BM=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$.

第III组(应用三角等式或相似三角形)

解7: 过点M作$MN\perp AC$, 垂足为点N(图2).

可得$\triangle BCD\backsim\triangle CNM$. 显然$AN=MN$, $MN/\!/BC$, 于是得等式
$\frac{1}{2}=\frac{CD}{BC}=\frac{MN}{CN}=\frac{AM}{BM}$, 即$\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$.

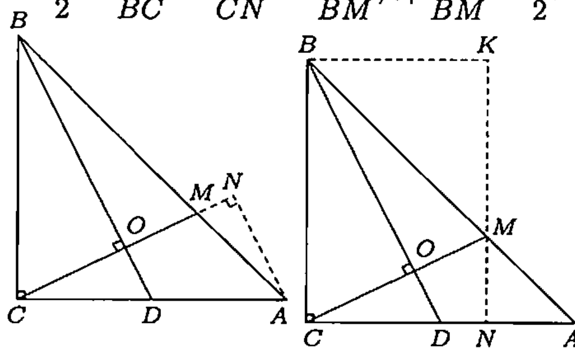


图4　图5

解8: 过点A作$AN/\!/BD$, 交CM的延长线于点N(图4). 可得$\frac{AM}{BM}=\frac{AN}{OB}$.

因为$AN=2OD=\frac{2}{5}BD$, 而$OB=\frac{4}{5}BD$,

所以 $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$.

解9: 过点M作$MK/\!/BC$交CA于点N, 过点B作$BK/\!/AC$交MK于点K(图5).

由$\triangle AMN\backsim\triangle BMK$得$\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{MN}{MK}$.

由$\triangle BCD\backsim\triangle CNM$得$\dfrac{MN}{CN}=\dfrac{1}{2}$,

由于$MK=BK=CN$,

因此$\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$.

解10: 过点B作$BK/\!/AC$并与CM的延长线相交于点K(图6). 由$\triangle BMK\backsim\triangle AMC$及$\triangle BCD\backsim\triangle KBC$得

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AC}{BK}=\frac{BC}{BK}=\frac{1}{2}.$$

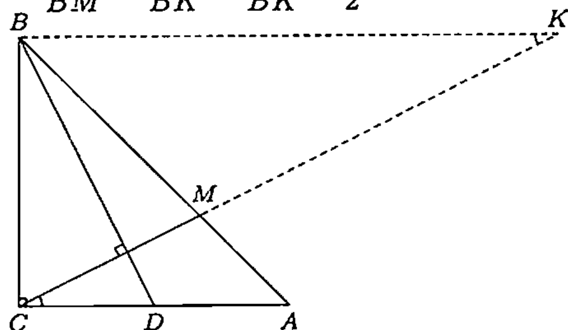


图 6

解11: 延长BC到点P, 使得$PC=CD$, 连结AP(图7). 由$\triangle ACP\cong\triangle BCD$可得$\angle PAC=\angle DBC=\angle ACM$, 故$CM/\!/AP$, 于是

$$\frac{AM}{BM}=\frac{CP}{BC}=\frac{1}{2}.$$

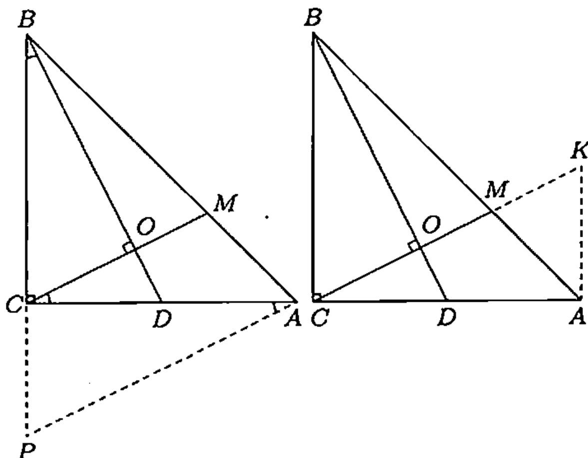


图 7　　图 8

解12: 过点A作$AK\perp AC$, 交CM的延长线于点K(图8). 可得$\triangle AKC\cong\triangle CDB$, 而$\triangle AKM\backsim\triangle BCM$, 因此

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AK}{BC}=\frac{CD}{BC}=\frac{1}{2}.$$

解13: 设点N是BM的中点. 过点N作$NK\perp BD$, 交BC于点K, 过点A作$AC_1\perp BD$, 交BC的延长线于点C_1(图9). 可得$BK=KC$, 且$\triangle CAC_1\cong\triangle CBD$, 由此得$CC_1=CD=KC$. 注意到$CD=\dfrac{1}{2}BC$, 故$BK=KC=CC_1$, 得$BN=MN=AM$. 即是说$\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$.

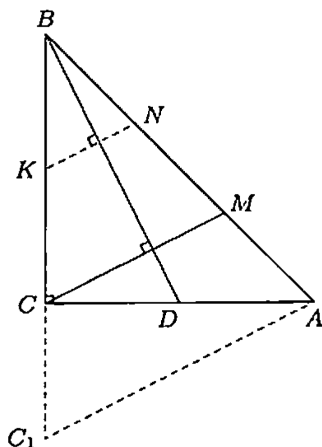


图 9

第IV组(应用绕点旋转)

解14: 绕点C旋转90°. 这时点D旋转到点P, 而$\triangle BCD$转变为$\triangle ACP$(图7). 这时$CP=CD=\dfrac{1}{2}BC$及$AP\perp BD$. 而$CM\perp BD$, 于是$AP/\!/CM$. 由平行线截线段成比例定理, 所以$\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{CP}{BC}=\dfrac{1}{2}$.

第V组(应用著名定理和公式)

引理　在直角三角形中, 斜边上的高将斜边分成的两线段的比等于两直角边平方的比.

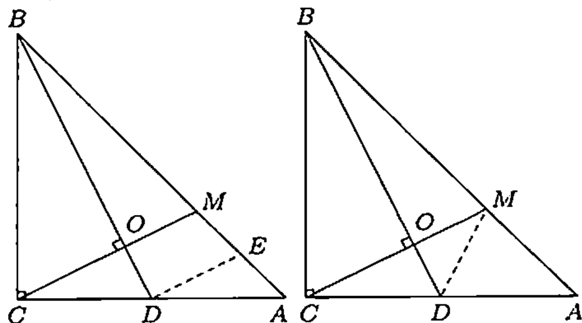


图 10　　图 11

解15: 由引理, $OD:OB=1:4$. 过点D作$DE/\!/CM$, 交AB于点E(图10). 那么由平行线

等分线段定理可知$EM = AE = \frac{1}{4}BM$, 因此$\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.

解16: 对于$\triangle ABD$(图10), 应用美奈劳斯定理, 得$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BO}{OD}\cdot\frac{DC}{CA} = 1$. $\frac{BO}{OD} = 4$, $\frac{DC}{CA} = \frac{1}{2}$, 于是$\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.

解17: 连结DM(图11), 在四边形$BCDM$中, 对角线相互垂直, 因此得$BM^2 + CD^2 = BC^2 + DM^2$. 设$AC = 1, AM = x$, 在$\triangle ADM$中应用余弦定理, 得

$$DM^2 = x^2 + \frac{1}{4} - \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

$$BM^2 = (\sqrt{2} - x)^2, CD^2 = \frac{1}{4}, BC^2 = 1,$$

代入上述等式中, 得$(\sqrt{2} - x)^2 + \frac{1}{4} = 1 + x^2 + \frac{1}{4} - \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

解得$x = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 即$AM = \frac{\sqrt{2}}{3}, BM = AB - AM = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 所以$\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.

第VI组(应用三角形中高、中线、角平分线的性质)

解18: 过点M作$MO /\!/ AC$, 交BD于点O(图12). 可得$MO \perp BC$.

又$BN \perp CM$,故点O是$\triangle BCM$的垂心,可得边BM上的高经过点O,而$AC = BC$,故$\triangle ABC$边BA上的中线经过点O.

又BD是$\triangle ABC$的中线, 故点O是$\triangle ABC$的重心. 因此$\frac{AM}{BM} = \frac{DO}{BO} = \frac{1}{2}$.

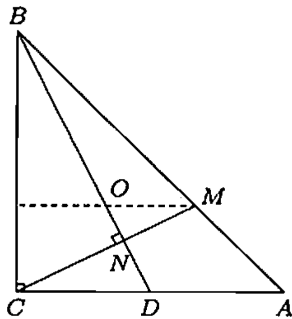


图 12

解19: 延长CA到点P, 使$AP = AC$, 连结BP; 作$\triangle BCP$的中线CQ, 连结AQ(图13). 故$CQ = PQ$, 得$AQ \perp PC$. 此外, $AQ = \frac{1}{2}BC$. 因此$\triangle CBD \cong \triangle ACQ$, 由此得$BD \perp CQ$. 所以点$M$在$CQ$上. 在$\triangle BCP$中, 点$M$是重心, 所以$\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.

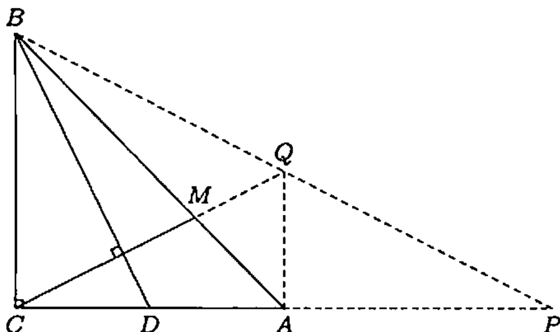


图 13

解20: 将$\triangle ABC$补成正方形$ACBE$, 连结CE, 交AB于点O(图14), 则$CO = OE$. 延长CM交AE于点K.

可得$\triangle AKC \cong \triangle CDB$, 于是$AK = CD$.

而$CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AE$, 因此$AK = \frac{1}{2}AE$.

故点M是$\triangle ACE$的重心, $OM = \frac{1}{2}AM$,

推得$BM = BO + OM = \frac{3}{2}AM + \frac{1}{2}AM = 2AM$. 所以$\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.

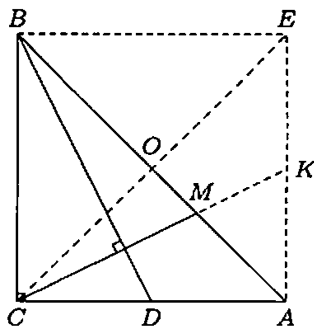


图 14

解21: 作$\triangle ABC$的外接圆, 并延长CM与圆相交于点P, 连结PA、PB(图15). $\angle ABP = \angle ACP = \angle CBD = \alpha$. AB是圆的直径, 显然$\angle APB = 90°$, $\angle APC = \angle ABC = 45°$, 这就是说, PM是$\triangle APB$的角平分线. 所以$\frac{AM}{BM} = \frac{AP}{BP} = \tan\alpha = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}$.

第VII组(应用面积的性质)

一道“压轴题”的多种解法

200090 上海市新大桥中学 赵艳凤

题目 如图1, 在等腰梯形$ABCD$中, $AD/\!/BC$, $AD=1$, $AB=CD=2$, 点E在腰CD上, 且$\angle EBC=\angle ABD$.

(1) 若$BC=3$, 求$\tan C$的值;

(2) 若$BC=x$, $CE=y$, 求y关于x的函数关系式, 并写出函数的定义域;

(3) 连结A、E, 若$\triangle ABE$与$\triangle DBC$相似, 求BC的长.

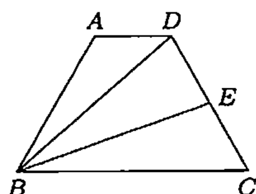


图 1

这是上海市杨浦区2011学年初三第一学期期中测试卷中的压轴题, 笔者任教班级的得分率是22%, 学生都完成了第一问, 但是第二问和第三问, 基本没有学生找到解决问题的方法, 是什么阻碍了他们的思考呢? 原来本题第二问和第三问都是需要添加“辅助线”才能解决的, 可是他们不知道如何添加辅助线, 凭感觉添出的辅助线又不知道有什么作用, 结果导致了一无所获. 针对第二问笔者设计了一节试题分析课, 引导学生从多方位、多角度、多层次进行思考, 从而获取多种合理添加辅助线的方法和解题思路. 现将这节课中和学生一起讨论出的多种解题思路和添辅助线的方法整理出来与大家分享.

一、构造与$\triangle ABD$相似的三角形

思路1: 利用已有的平行关系, 构造相似基本形.

解: 如图2, 延长BE交AD延长线于点F.

$\because AD/\!/BC$, $\therefore \angle EBC=\angle F$.

$\because \angle EBC=\angle ABD$, $\therefore \angle F=\angle ABD$.

$\because \angle A=\angle A$,

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle AFB$,

$\therefore \dfrac{AB}{AF}=\dfrac{AD}{AB}$.

$\because AD=1, AB=2$,

$\therefore AF=4$, $DF=3$,

$\because AD/\!/BC$,

$\therefore \dfrac{DF}{BC}=\dfrac{DE}{EC}$,

$\because BC=x, CE=y, DE=2-y$,

$\therefore \dfrac{3}{x}=\dfrac{2-y}{y}$, 整理得$y=\dfrac{2x}{x+3}$.

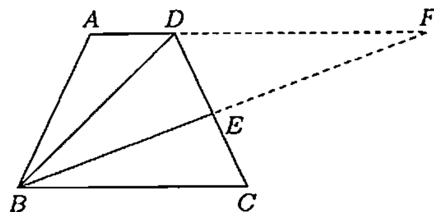


图 2

评注: 这样添加辅助线使图形产生了学生们

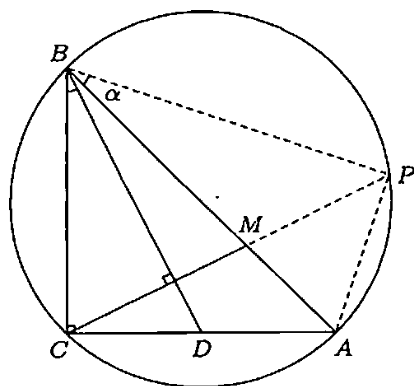


图 15

解22: 因为$\triangle AMC$与$\triangle BMC$有相等的高, 所以$\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle BMC}}=\dfrac{AC\cdot CM\sin\angle ACM}{BC\cdot CM\sin\angle BCM}$.

注意到$\angle ACM=\angle CBD$及$\angle BCM=90^\circ-\angle ACM$, 得

$$\frac{AM}{BM}=\tan\angle CBD=\frac{CD}{BC}=\frac{1}{2}.$$

参考文献

[1] Ажгалиева А. О., Ажгалиева О. А. Одвадцати пяти способах решения одной задачи Математика в школе 6/2009. 39-46.

非常熟悉的"共边相似形"和"X"型这两个基本图形. 当然, 本题也可以先由 $AD//BC$ 得到 $\frac{DF}{BC}=\frac{DE}{EC}$, 将 DF 用含有 x、y 的代数式表示, 即 $DF=\frac{(2-y)x}{y}$, 再利用 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AFB$ 相似关系, 由 $\frac{AB}{AF}=\frac{AD}{AB}$ 获得 x 与 y 的等量关系, 从而整理出 $y=\frac{2x}{x+3}$.

思路2: 利用等腰梯形的性质, 构造相似形.

解: 如图3, 过点 E 作 $EP//AB$, 交 BC 于点 P. $\therefore\ \angle EPB+\angle ABC=180°$.

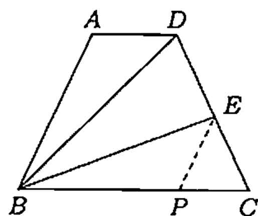


图3

同理 $\angle A+\angle ABC=180°$.

$\therefore\ \angle EPB=\angle A$.

又 $\angle EBC=\angle ABD$,

$\therefore\ \triangle ABD\backsim\triangle PBE$,

$\therefore\ \frac{AB}{BP}=\frac{AD}{PE}$, 易求 $EP=EC=y$, 所以可得 $\frac{2}{x-CP}=\frac{1}{y}$.

进行到此, 求线段 CP 的长就成了解决本题的关键. 那么怎样求线段 PC 的长度呢? 基于这样的思考, 结合梯形的背景产生如下几种求法.

(1) 平移一腰法

解法一: 如图4, 过点 D 作 $DQ//AB$ 交 BC 于点 Q.

$\because\ EP//AB$, $\therefore\ DQ//EP$,

$\therefore\ \frac{CP}{CQ}=\frac{CE}{CD}$, 即 $\frac{CP}{x-1}=\frac{y}{2}$,

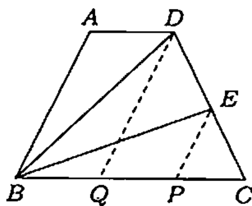


图4

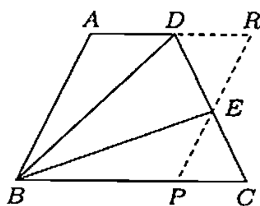


图5

从而得 $CP=\frac{(x-1)y}{2}$, 代入前面求得的 $\frac{2}{1}=\frac{x-CP}{y}$, 即 $y=\frac{2x}{x+3}$.

解法二: 如图5, 延长 PE 交 AD 的延长线于点 R. 易证四边形 $ABPR$ 是平行四边形,

$\therefore\ AR=BP$, $PR=AB=2$, 即 $x-CP=1+DR$, 整理得

$DR=x-1-CP$. ……………… ①

$\because\ DR//BC$,

$\therefore\ \frac{CP}{DR}=\frac{EC}{ED}$, 即 $\frac{CP}{DR}=\frac{y}{2-y}$. ……… ②

将 ① 代入 ② 得 $CP=\frac{(x-1)y}{2}$.

解法三: 如图6, 过点 A 作 $AM//CD$, 交 BC 于点 M.

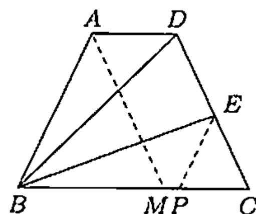


图6

易证 $\triangle ABM\backsim\triangle EPC$,

$\therefore\ \frac{AB}{EP}=\frac{BM}{PC}$, 即 $\frac{2}{y}=\frac{x-1}{CP}$,

整理得 $CP=\frac{(x-1)y}{2}$.

(2) 添高法

解: 如图7, 过点 D 作 $DN\perp BC$ 于点 N, 过点 E 作 $ET\perp BC$ 于点 T.

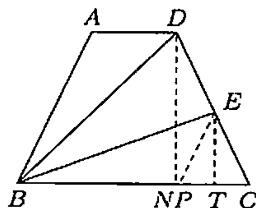


图7

易得 $CN=\frac{x-1}{2}$,

$CP=2TC=2EC\cdot\cos C$,

$\therefore\ \cos C=\frac{NC}{DC}=\frac{x-1}{4}$,

$\therefore\ CP=\frac{(x-1)y}{2}$.

(3) 延长两腰法

解: 如图8, 分别延长 BA、CD 交于点 O.

$\because\ AD//BC$,

$\therefore\ \dfrac{AD}{BC}=\dfrac{OA}{OB}$, 即 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{OA}{OA+2}$,

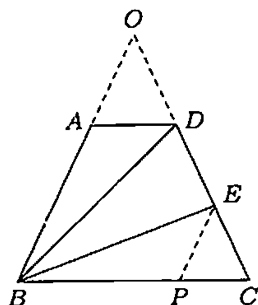


图 8

整理得 $OA=\dfrac{2}{x-1}$, $\therefore\ OB=\dfrac{2x}{x-1}$.

$\because\ EP/\!/AB$,

$\therefore\ \dfrac{EP}{BO}=\dfrac{CP}{CB}$, 即 $\dfrac{y}{\frac{2x}{x-1}}=\dfrac{CP}{x}$,

整理得 $CP=\dfrac{(x-1)y}{2}$.

在(3)的基础上也就有了如下想法:

如图9, 过点 C 作 $CV/\!/AB$ 交 BE 的延长线于点 V.

$\therefore\ \dfrac{CV}{BO}=\dfrac{CE}{EO}$, $\angle BCV=\angle BAD$.

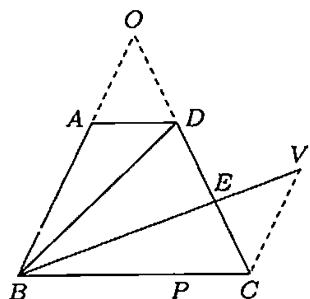


图 9

$\because\ \angle EBC=\angle ABD$,

$\therefore\ \triangle ABD\backsim\triangle CBV$,

$\therefore\ \dfrac{CV}{AD}=\dfrac{BC}{AB}$, 可得 $CV=\dfrac{x}{2}$.

根据(3)可知 $CO=OB=\dfrac{2x}{x-1}$,

$EO=OB-EC=\dfrac{2x}{x-1}-y$,

代入 $\dfrac{CV}{BO}=\dfrac{CE}{EO}$ 得 $y=\dfrac{2x}{x+3}$.

评注: 几种方法形式虽然不同, 但都是将梯形转化成平行四边形和三角形.

二、构造与 $\triangle BEC$ 相似的三角形

思路: 利用等腰三角形的性质构造等角, 为相似准备条件.

解法一: 如图10, 取 AB 的中点 S, 过点 S 作 $SH\perp BA$ 交 BC 于点 H, 连结 AH 交 BD 于点 G.

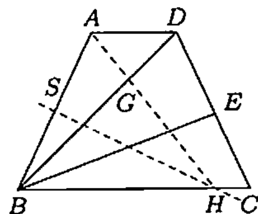


图 10

$\therefore\ AH=BH=\dfrac{BS}{\cos\angle ABC}=\dfrac{1}{\frac{x-1}{4}}=\dfrac{4}{x-1}$,

(由添高法的证明可得 $\cos\angle ABC=\dfrac{x-1}{4}$)

$\angle ABC=\angle BAH$, 易得 $\angle BAG=\angle C$.

又 $\angle EBC=\angle ABD$,

$\therefore\ \triangle BAG\backsim\triangle BCE$,

$\therefore\ \dfrac{AG}{CE}=\dfrac{AB}{CB}$, 即 $\dfrac{AG}{y}=\dfrac{2}{x}$.

$\because\ AD/\!/BC$,

$\therefore\ \dfrac{AG}{AH-AG}=\dfrac{AD}{BH}$,

即 $\dfrac{AG}{\frac{4}{x-1}-AG}=\dfrac{1}{\frac{4}{x-1}}$,

整理得 $AG=\dfrac{4}{x+3}$,

代入 $\dfrac{AG}{y}=\dfrac{2}{x}$ 得 $y=\dfrac{2x}{x+3}$.

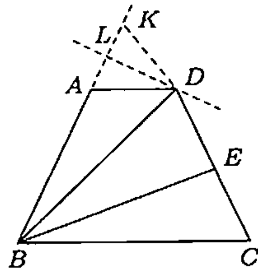


图 11

解法二: 如图11, 以点 D 为圆心, DA 为半径画弧, 交 BA 延长线于点 K. 则有 $DK=DA=1$, $\angle KAD=\angle AKD=\angle ABC=\angle C$,

$\therefore\ \triangle BDK\backsim\triangle BEC$,

$\therefore\ \dfrac{BK}{KD}=\dfrac{BC}{EC}$, 即 $\dfrac{BK}{1}=\dfrac{x}{y}$. ………… ①

过点 D 作 $DL\perp BA$ 于点 L, 得

$$AK=2AL=2AD\cdot\cos\angle KAD=\frac{x-1}{2},$$

(由添高法的证明可得$\cos\angle KAD=\frac{x-1}{4}$)

$\therefore\ BK=\frac{x+3}{2}$.

将$BK=\frac{x+3}{2}$代入①得$y=\frac{2x}{x+3}$.

点评: 此解法是利用等腰三角形的性质为相似提供了等角的条件.

波利亚指出: "掌握数学就是善于解题." 教师应适时引导学生从不同的方法、角度、思维方式去观察、联想、分析, 根据问题的特定条件探索出一系列的解题思路. 本题涉及等腰三角形、锐角三角比、三角形相似、等腰梯形等知识点. 解法较多, 是引导学生进行一题多解很好的素材. 通过一题多解, 不仅能促进学生对相关知识点的理解与掌握, 还有利于培养学生的创新意识, 提高学生的解题能力. 举一反三:

分析这道压轴题后, 笔者给学生留了这样一个问题:

如图12, 已知梯形$ABCD$中, $AD/\!/BC$, $AB\perp BC$, $AD=CD=5$, $AB=4$, 点P在BC上运动(点P不与B、C重合), 点E在线段CD上, 且$\angle APB=\angle EPC$, 设$BP=x$, $DE=y$.

(1)求y关于x的解析式, 并写出定义域.

(2)若点E在射线CD上, y与x的函数关系会发生变化吗?

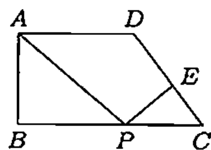


图 12

学生给出了以下三种方法:

解法一: 利用原有的平行关系, 构造基本形.

解: 如图13, 延长PE交AD延长线于点F, 过点P作$PH\perp AF$.

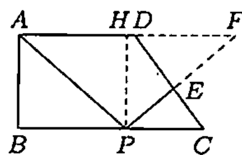


图 13

易得$AF=2x$, $\therefore\ DF=2x-5$.

$\because\ AD/\!/BC$, $\therefore\ \frac{DF}{PC}=\frac{DE}{EC}$,

易求$BC=8$,

$\therefore\ \frac{2x-5}{8-x}=\frac{y}{5-y}$,

整理得$y=\frac{10x-25}{x+3}$.

解法二: 如图14, 利用等腰梯形的性质构造与$\triangle EPC$相似的三角形.

解: 过点D作$DN\perp BC$于点N, 延长CB至点F, 使得$BF=CN$, 连结AF.

易得四边形$AFCD$为等腰梯形,

$CN=BF=3, PF=x+3, AF=5$,

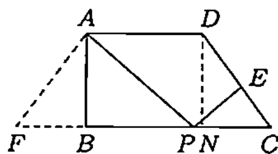


图 14

$PC=8-x, EC=5-y$,

$\therefore\ \angle F=\angle C$.

又$\angle APB=\angle EPC$,

$\therefore\ \triangle AFP\backsim\triangle ECP$,

$\therefore\ \frac{AF}{EC}=\frac{PF}{PC}$, 即$\frac{5}{5-y}=\frac{3+x}{8-x}$.

整理得$y=\frac{10x-25}{x+3}$.

解法三: 构造与$\triangle ABP$相似的三角形

解: 如图15, 过点E作$EM\perp BC$于点M.

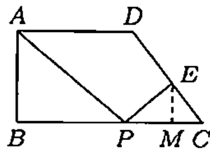


图 15

通过解$\mathrm{Rt}\triangle ECM$可得

$CM=0.6EC, EM=0.8EC$,

$PM=8-x-0.6EC$.

易证$\triangle ABP\backsim\triangle EMP$,

$\therefore\ \frac{AB}{EM}=\frac{PB}{PM}$,

$\therefore\ \frac{4}{0.8EC}=\frac{x}{8-0.6EC-x}$,

整理得$EC=\frac{40-5x}{x+3}$, $\therefore\ y=\frac{10x-25}{x+3}$.

看到学生给出的多种解法, 笔者禁不住为学生的表现而喝彩, 同时感到他们的潜力是不可估量的.

巧用抽屉原理证明代数不等式

712000 陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心 安振平

要把3个苹果放到2个抽屉里，无论怎样放，我们发现有一个抽屉里面至少有2个苹果. 这一现象，就是人们所说的"抽屉原理". 抽屉原理的一般含义为:"如果每个抽屉代表一个集合，一个苹果可以代表一个元素，假如把$n+1$或多于$n+1$个元素放到n个集合中去，其中必定有一个集合里至少有两个元素." 抽屉原理有时也被称为鸽笼原理.

巧用抽屉原理证明某些代数不等式，会使得证明更简单. 本文将给出几个经典的例子，供教学时选用.

例1 已知a、b、c为正实数，$a^2+b^2+c^2+abc=4$，求证: $a+b+c\leqslant 3$.

证明: 在正实数a、b、c中，必有2个同时不小于1，或者不大于1，不妨设为b、c，则有$(b-1)(c-1)\geqslant 0$，即$bc\geqslant b+c-1$.

因为$4-a^2=b^2+c^2+abc\geqslant 2bc+abc=bc(2+a)$，所以$2-a\geqslant bc\geqslant b+c-1$.

故有$a+b+c\leqslant 3$.

例2 已知a、b、$c>0$，$a^2+b^2+c^2=3$，试证: 代数式$a^2b^2+c^2$、$b^2c^2+a^2$、$c^2a^2+b^2$中至少有一个不大于2.

证明: 因为a^2-1、b^2-1、c^2-1中必有2个不同时大于零或者不同时小于零，不妨设为a^2-1、b^2-1，从而有$(a^2-1)(b^2-1)\leqslant 0$，即有

$$a^2+b^2\geqslant a^2b^2+1,$$

所以$a^2+b^2+c^2\geqslant a^2b^2+1+c^2$，即有

$$a^2b^2+c^2\leqslant 2.$$

故代数式$a^2b^2+c^2$、$b^2c^2+a^2$、$c^2a^2+b^2$中至少有一个不大于2.

例3 设a、b、$c>0$，求证: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant abc$.

证明: 设x、y、$z>0$，$xyz=1$，在x、y、z当中必有一个不大于1，一个不小于1，不妨设$x\leqslant 1$，$y\geqslant 1$，得$(x-1)(y-1)\leqslant 0$，即有

$$x+y\geqslant 1+xy,$$

所以$x+y+z\geqslant 1+xy+z\geqslant 1+2\sqrt{xy\cdot z}=3$，即$x+y+z\geqslant 3$.

特别地令，$x=\dfrac{a^3}{abc}$，$y=\dfrac{b^3}{abc}$，$z=\dfrac{c^3}{abc}$，代入$x+y+z\geqslant 3$，便得 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant abc$.

例4 设x、y、$z>0$，$x^2+y^2+z^2=1$，求证: $xy+yz+zx-\sqrt{3}xyz\leqslant\dfrac{2}{3}$.

证明: 由x、y、$z>0$，$x^2+y^2+z^2=1$，知x、y、z中必然有2个均不大于$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，或者均不小于$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，不妨设为x、y，便得

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\geqslant 0,$$

即有 $x+y-\sqrt{3}xy\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 于是

$$\begin{aligned}&xy+yz+zx-\sqrt{3}xyz\\&=xy+(x-y-\sqrt{3}xy)z\leqslant xy+\frac{1}{\sqrt{3}}z\\&\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+z^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3},\end{aligned}$$

故有$xy+yz+zx-\sqrt{3}xyz\leqslant\dfrac{2}{3}$.

例5 如果正数x、y、z满足$xyz=1$，那么$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+3\geqslant 2(x+y+z)$.

证明: 原不等式等价

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+3\geqslant 2(x+y+z).\cdots\cdots(*)$$

注意到$x^2y^2z^2=1$，于是在x^2、y^2、z^2中一定有两个同时不小于1，或者不大于1，不妨设为x^2和y^2，则有

$$(x^2-1)(y^2-1)\geqslant 0.$$

下面，用作差法证明不等式(*). 事实上

$$\begin{aligned}&x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+3-2(x+y+z)\\&=(y^2z^2+z^2x^2-2yz\cdot zx)+(x^2y^2-x^2\end{aligned}$$

导数解题中的几个典型错误

830002 新疆乌鲁木齐兵团二中 张国治

导数是新课程高考和竞赛的重点内容之一，也是初等数学与高等数学的重要衔接内容. 学生在学习时，总存在许多问题，本文给出学生学习导数时出现的几个典型错误，供读者参考.

一、求曲线的切线时，在某点处与过某点的概念混淆引发的错误

例1 (2004年全国高考重庆卷) 已知曲线$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$，则过点$P(2,4)$的切线方程为______.

解析：易知点$P(2,4)$在曲线$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$上，而$k_P=y'|_{x=2}=4$，故所求的切线方程为$y-4=4(x-2)$，即$4x-y-4=0$.

解答错了，错在哪里?

解答错在由点$P(2,4)$在曲线$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$上，误认为点$P(2,4)$为切点，而导数的几何意义中$f'(x)$为曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处

$$-y^2+1)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)$$
$$=(yz-zx)^2+(x^2-1)(y^2-1)+(x-1)^2$$
$$+(y-1)^2\geqslant 0,$$

故 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+3\geqslant 2(x+y+z)$.

例6 已知a、b、$c>0$，求证:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geqslant 3(a+b+c)^2.$$

证明：因为a^2-1、b^2-1、c^2-1中必有2个不大于零或者不小于零，不妨设为a^2-1、b^2-1，从而有$(a^2-1)(b^2-1)\geqslant 0$，即有

$$a^2b^2+1\geqslant a^2+b^2,$$

也就是 $(a^2+2)(b^2+2)\geqslant 3(a^2+b^2+1)$.

于是，应用柯西不等式得

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)$$
$$\geqslant 3(a^2+b^2+1)(c^2+2)$$
$$=3(a^2+b^2+1)(1^2+1^2+c^2)$$
$$\geqslant 3(a+b+c)^2,$$

故有 $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geqslant 3(a+b+c)^2$.

需要说明的是，由此题及$(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$，立得2004年亚太地区数学奥林匹克竞赛中的一道不等式题目:

对于任意正实数a、b、c，均有

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geqslant 9(ab+bc+ca).$$

例7 (《数学通报》2010年第9期1872题) 证明：在任意13个实数中，一定能找到两个实数x、y，使得$y>\frac{x-0.3}{1+0.3x}$.

证明：任给13个实数a_1，a_2，$\cdots$，a_{13}，在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内一定存在13个实数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{13}$，使得$\tan\theta_k=a_k\,(k=1,2,\cdots,13)$.

将区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$等分为12个长为$\frac{\pi}{12}$的小区间$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{12}\right]$，$\left(-\frac{5\pi}{12},-\frac{4\pi}{12}\right]$，$\cdots$，$\left(\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right)$.

根据抽屉原理，必存在两个θ_i、θ_j属于同一小区间，不妨设$\theta_i\geqslant\theta_j$，且$\theta_i-\theta_j\leqslant\frac{\pi}{12}$,

于是，有$a_i\geqslant a_j$，且$0\leqslant\tan(\theta_i-\theta_j)\leqslant\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}<0.3$，即

$$0\leqslant\frac{\tan\theta_i-\tan\theta_j}{1+\tan\theta_i\tan\theta_j}<0.3.$$

令$x=a_i=\tan\theta_i$，$y=a_j=\tan\theta_j$，则有$\frac{x-y}{1+xy}<0.3$，也就是$y>\frac{x-0.3}{1+0.3x}$.

故在任意13个实数中，一定能找到两个实数x、y，使得$y>\frac{x-0.3}{1+0.3x}$.

参考文献

[1] 安振平. 妙用抽屉原理证明不等式[J]. 数学通报，2010(1)：59-60.

[2] 安振平. 巧用抽屉原理妙证三角形不等式[J]. 数学通讯，2010(11-12)：110-111.

切线的斜率, 点M为切点. 此题中, 点$P(2,4)$不一定是切点.

正确解答: 设切点$M\left(x_0,\frac{1}{3}x_0^3+\frac{4}{3}\right)$, 则$k_M=y'|_{x=x_0}=x_0^2$, 故切线方程为$y-\left(\frac{1}{3}x_0^3+\frac{4}{3}\right)=x_0^2(x-x_0)$. 因为点$P(2,4)$在切线上, 所以$4-\left(\frac{1}{3}x_0^3+\frac{4}{3}\right)=x_0^2(2-x_0)$, 解得$x_0=2$或$x_0=-1$, 故所求切线方程为

$$4x-y-4=0 \text{或} x-y+2=0.$$

评注: 若求某点处的切线方程, 则该点必为切点; 若求过某点的切线方程, 则无论该点是否在曲线上, 均应另设切点求解, 以防漏解. 事实上, 无需甄别是在某点处或过某点切线, 均设切点, 求出切线方程后, 将该点代入便可获解.

二、极值充要条件理解不清引发的错误

例2 (2009年全国高考湖北卷)已知函数$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+bx^2+cx+bc$, 如果函数$f(x)$在$x=1$处有极值$-\frac{4}{3}$, 试确定$b$、$c$的值.

解析: $f'(x)=-x^2+2bx+c$, 由$f(x)$在$x=1$处有极值$-\frac{4}{3}$,可得

$$\begin{cases} f'(1)=-1+2b+c=0, \\ f(1)=-\frac{1}{3}+b+c+bc=-\frac{4}{3}, \end{cases} \text{解得}$$

$$\begin{cases} b=1, \\ c=-1, \end{cases} \text{或} \begin{cases} b=-1, \\ c=3. \end{cases}$$

解答错了, 错在哪里?

解答错在$f'(x_0)=0$仅是可导函数$f(x)$在$x=x_0$取极值的必要条件而非充要条件, 还需要判断$x=x_0$左右两边导数值正负, 若$f'(x)\geqslant 0$ ($f'(x)\leqslant 0$) 恒成立, 则$f(x)$无极值. 如函数$f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2\geqslant 0$, 虽然$f'(0)=0$, 但$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增, 所以$x=0$不是函数极值点. 事实上, 当$b=1,c=-1$时, $f'(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2\leqslant 0$, 此时$f(x)$没有极值.

正确解答: 因为$f'(x)=-x^2+2bx+c$, 由$f(x)$在$x=1$处有极值$-\frac{4}{3}$, 可得

$$\begin{cases} f'(1)=-1+2b+c=0, \\ f(1)=-\frac{1}{3}+b+c+bc=-\frac{4}{3}, \end{cases} \text{解得}$$

$$\begin{cases} b=1, \\ c=-1, \end{cases} \text{或} \begin{cases} b=-1, \\ c=3. \end{cases}$$

若$b=1,c=-1$, 则$f'(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2\leqslant 0$, 此时$f(x)$没有极值;

若$b=-1,c=3$, 则$f'(x)=-x^2-2x+3=-(x+3)(x-1)$, 当$x$变化时, $f(x)$、$f'(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值-12	↗	极大值$-\frac{4}{3}$	↘

∴ 当$x=1$时, $f(x)$有极大值$-\frac{4}{3}$, 故$b=-1,c=3$即为所求.

评注: $f'(x_0)=0$是可导函数$y=f(x)$在$x=x_0$取极值的必要条件, 当函数在$x=x_0$不可导时, 必须用极值定义辅以图像来判断$x=x_0$是否是极值点. 如$f(x)=|x|$在$x=0$有极小值, 但$f'(0)$不存在. 可见, $f'(x_0)=0$是函数$y=f(x)$在$x=x_0$取极值的既不充分也不必要条件.

三、求极值时忽视不可导点引发的错误

例3 求函数$f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$的极值.

解析: 易知$x\in\mathbf{R}$, $f(x)=2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$, $f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$. 令$f'(x)=0$得$x=1$, 易知当$f'(x)$在$x=1$附近左负右正, 故$x=1$是函数的极小值点, 无极大值点.

解答错了, 错在哪里?

解答错在只考虑函数的极值点为导数为零的点, 事实上, 极值的可疑点为导数为零的点(稳定点)和不可导点. 易知$x=1$为函数的稳定点, $x=0$为函数的不可导点, 都有可能为极值点.

正确解答: 易知$x\in\mathbf{R}$, $f(x)=2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$, $f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$. 令$f'(x)=0$得$x=1$. $x=0$为函数的不可导点, 列表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-3	↗

由上表可知, $x=0$为函数的极大值点, 极大值$f(0)=0$; $x=1$为函数的极小值点, 极小值$f(1)=-3$.

评注: 函数极值的可疑点为导数为零的点(稳定点)和不可导点.

四、求最值时忽视不可导点引发的错误

例4　求函数$f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}, x\in[-1,2]$的最值.

解析: 易知$x\in\mathbf{R}, f(x)=2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}, f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$, 令$f'(x)=0$得$x=1$. 因为$f(-1)=-7$, $f(0)=0$, $f(1)=-3$, $f(2)=-\sqrt[3]{4}$, 所以当$x=-1$时, 函数的最小值为-7; 当$x=2$时, 函数的最大值为$-\sqrt[3]{4}$.

解答错了, 错在哪里?

解答错在只考虑函数的最值点为导数为零的点和区间端点, 事实上, 最值的可疑点为导数为零的点 (稳定点)、不可导点和区间端点. 易知$x=0$为函数的不可导点也有可能为最值点.

正确解答: 易知$x\in\mathbf{R}, f(x)=2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$, $f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$. 令$f'(x)=0$得$x=1$. $x=0$为函数的不可导点, 因为$f(-1)=-7$, $f(1)=-3$, $f(2)=-\sqrt[3]{4}$, 所以当$x=-1$时, 函数的最小值为-7, 当$x=0$时, 函数的最大值为0, 如图1.

评注: 函数最值的可疑点为导数为零的点(稳定点)、不可导点和区间端点, 即极值点与区间端点.

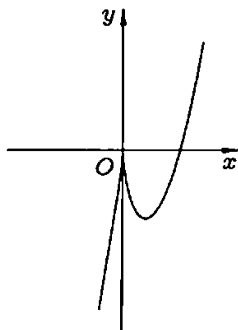


图 1

五、求函数单调性时忽视间断点引发的错误

例5　若函数$g(x)=\frac{e^x}{x^2+k}$在区间(2, 3)上不单调, 则实数k的取值范围是________.

解析: 因为$g(x)=\frac{e^x}{x^2+k}$, 所以$g'(x)=\frac{e^x(x^2-2x+k)}{(x^2+k)^2}$.

又$g(x)$在区间(2, 3)上不单调, 故$g'(x)=\frac{e^x(x^2-2x+k)}{(x^2+k)^2}$在区间(2, 3)上有根, 且不能有两个相等的根. 令$g'(x)=0$, 有$x^2-2x+k=0$, 则

$$\begin{cases}4-4+k<0,\\9-6+k>0,\end{cases}\text{解得}-3<k<0.$$

解答错了, 错在哪里?

解答错在只考虑到在区间(2, 3)上不单调而忽视了函数的定义域. 事实上, 当$k\in(-9,-4)$时, 函数在区间(2, 3)上有间断点$x=\sqrt{-k}$, 仍为不单调函数.

正确解答:

(1)若$k\in(-9,-4)$, 由$x^2+k=0$得$x=\sqrt{-k}\in(2,3)$, 故函数在区间(2, 3)不单调符合题意;

(2)若$k\notin(-9,-4)$, 则当$x\in(2,3)$时, $x^2+k\neq0$. $g'(x)=\frac{e^x(x^2-2x+k)}{(x^2+k)^2}$.

又$g(x)$在区间(2, 3)上不单调, 故$g'(x)=\frac{e^x(x^2-2x+k)}{(x^2+k)^2}$在区间(2, 3)上有根, 且不能有两个相等的根. 令$g'(x)=0$, 有$x^2-2x+k=0$, 则

$$\begin{cases}4-4+k<0,\\9-6+k>0,\end{cases}\text{解得}-3<k<0.$$

又$k\notin(-9,-4)$, 故$k\in(-3,0)$.

综上(1)、(2)可知$k\in(-9,-4)\cup(-3,0)$.

评注: 定义域是函数的"灵魂", 因此, 在解决函数问题一定要重视定义域.

六、函数单调性的充要条件理解不清引发的错误

例6　(2008年全国高考理科第19题)设函数$f(x)=x^3+ax^2+x+1\ (a\in\mathbf{R})$在区间$\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$内是减函数, 求$a$的取值范围.

解析: $f'(x)=3x^2+2ax+1$, 由题意函数在$\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$内递减, 故对一切$x\in\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, $f'(x)<0$恒成立, 而$f'(x)$为开口向上的抛物线, 故只需

$$\begin{cases}f'\left(-\frac{2}{3}\right)<0,\\f'\left(-\frac{1}{3}\right)<0,\end{cases}\text{解得}a>2.$$

解答错了, 错在哪里?

解答错在认为$f'(x)>0\,(<0)$是$f(x)$为增(减)函数的充要条件, 如$f(x)=x^3$在$\mathbf{R}$上单增, 但却有$f'(x)\geqslant0$恒成立. 事实上, 当$a=2$时, 仍符合题意, $f'(x)>0\,(<0)$仅是$f(x)$为增(减)函数的充分不必要条件.

正确解答: $f'(x)=3x^2+2ax+1$, 由题意知函数在 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 内递减, 故对一切 $x\in\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立. 而 $f'(x)$ 为开口向上的抛物线, 故只需

$$\begin{cases} f'\left(-\frac{2}{3}\right)\leqslant 0, \\ f'\left(-\frac{1}{3}\right)\leqslant 0, \end{cases}$$

解得 $a\geqslant 2$.

当 $a=2$ 时, 令 $f'(x)=3x^2+4x+1<0$, 得函数的递减区间为 $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)\supseteq\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 符合题意. 所以 $a\in[2,+\infty)$.

例7　已知函数 $f(x)=\frac{ax+1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 内单调递增, 求实数 a 的取值范围.

解析: $f'(x)=\frac{2a-1}{(x+2)^2}$, 由题意函数 $f(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 内单调递增, 所以对任意的 $x\in(-2,+\infty)$, $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立, 即 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

解答错了, 错在哪里?

解答错在没能理解函数单调性的充要条件, 中学阶段所涉及的单调性是指严格单调性. 事实上, 当 $a=\frac{1}{2}$ 时, $f'(x)=0, f(x)=\frac{1}{2}$ 为常数函数, 不具有单调性, 应舍去.

正确解答: 由 $f'(x)=\frac{2a-1}{(x+2)^2}\geqslant 0$ 在 $(-2,+\infty)$ 内恒成立, 得 $a\geqslant\frac{1}{2}$. 当 $a=\frac{1}{2}$ 时, $f'(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 恒等于0, 故 $a=\frac{1}{2}$ 不合题意, 应舍去, 即 $a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

评注: 函数严格单调性的充要条件: 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $f(x)$ 在区间 I 上严格递增(严格递减) $\Longleftrightarrow$ 对一切 $x\in I$, 有 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$ 且在 I 的任意区间上 $f'(x)$ 不恒等于0. 一般地, 对于逆求函数单调性的问题, 应先解 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$, 然后验证取等条件.

七、利用导数研究函数性态考虑不全引发的错误

例8　(2010年全国高中数学联赛福建预赛第11题) 当实数 a 为何值时, 关于 x 的方程 $ax=\ln x$ 无解、一解、两解?

解析: 易知 $x>0$, $ax=\ln x$ 变形为 $\frac{\ln x}{x}=a$, 则问题等价于在同一坐标系中函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 与 $y=a$ 图像有几个交点?

令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x>0$.

令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\mathrm{e}$; $f'(x)<0$ 得 $x>\mathrm{e}$, 故 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 单调递增, 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 单调递减. 可作出 $y=f(x)$ 的草图(如图2), $f(x)$ 有极大值 $f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

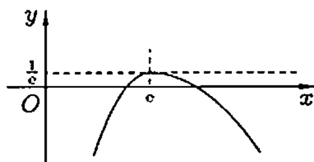


图2

由图2可知, 当 $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $y=\frac{\ln x}{x}$ 与 $y=a$ 无交点, 即 $ax=\ln x$ 无解;

当 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $y=\frac{\ln x}{x}$ 与 $y=a$ 有且只有一个交点, 即 $ax=\ln x$ 有一解;

当 $a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $y=\frac{\ln x}{x}$ 与 $y=a$ 有两个交点, 即 $ax=\ln x$ 有两解.

解答错了, 错在哪里?

解答错在根据导数研究函数图像时只关注函数的单调区间, 而忽视了函数的渐近线等性质导致画图出现偏差, 从而结论错误.

正确解答: 同上, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x>0$. 令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\mathrm{e}$, $f'(x)<0$ 得 $x>\mathrm{e}$. 故 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 单调递增, 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 单调递减.

当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时, $\ln x\to-\infty$, 故 $f(x)\to-\infty$; 当 $x\to+\infty$ 时, 利用洛比达法则, 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, 即当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)>0$ 且 $f(x)\to 0$.

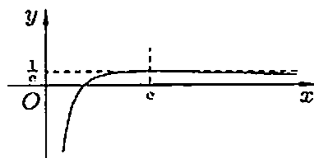


图3

即函数 $f(x)$ 有垂直渐近线 $x=0$ 和水平渐

(下转封底)

异曲同工 共奏数学思维之美
——一道梯形问题的多解赏析

710061 陕西师范大学附属中学 程自顺

本文通过对一道梯形问题的多角度解答及赏析来展现数学思维的美!

1. 问题的提出

如图1, 若在梯形$ABCD$中, $AB//CD$, M是腰BC的中点, $MN\perp AD$, 那么梯形$ABCD$的面积等于AD与MN的乘积吗? 请简要说明理由.

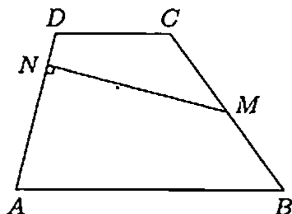


图1

这是一个以梯形为载体的探索性问题, 由于梯形问题的一些常用辅助线方法和本题求解目标的特殊性, 使得本题的解答呈现多种风采, 也充分展示了数学思维的别样之美! 下面为了行文简洁, 先给出将要用到的3个简单结论:

结论1 三角形的一条中线将三角形分成面积相等的两个三角形.

结论2 对角线互相垂直的四边形的面积等于其对角线乘积的一半.

结论3 连结平行四边形一边上的任一点与对边所形成的三角形的面积等于该平行四边形面积的一半.

2. 多种解法的风采展示

2.1 特殊化得一般结论

一般地, 梯形是仅有一组对边平行的四边形, 其中一组平行且不相等的边分别叫做上底和下底. 特别地, 当上底逐渐变短直至成一点时, 梯形就"变成"了一个三角形; 当上底逐渐变化直至等于下底时, 梯形就"变成"了一个平行四边形. 所以, 可以将三角形和平行四边形视作特殊的"梯形". 这一点也可以从梯形与三角形、平行四边形的面积公式之间的联系得到证实. 梯形的面积为(上底+下底)×高÷2, 如上所述, 当上底为0时, 就是三角形的面积公式: 底×高÷2; 当上底等于下底时, 就是平行四边形的面积公式: 底×高.

本题是一个结论未知的探索性问题, 故在解题之初, 我们可以通过将梯形"特殊化"为三角形或平行四边形, 先猜想出问题的结论, 然后再给予证明!

设梯形$ABCD$的面积为S. 如图2, 当C、D重合时, 梯形$ABCD$变成$\triangle DAB$, 连结AM, 从而$S=S_{\triangle DAB}=2S_{\triangle DAM}=2\times\frac{1}{2}\times AD\times MN=AD\times MN$.

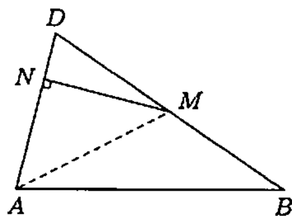


图2

如图3, 当$DC=AB$时, 梯形$ABCD$变成平行四边形$ABCD$, 此时$S=S_{\square ABCD}=AD\times MN$.

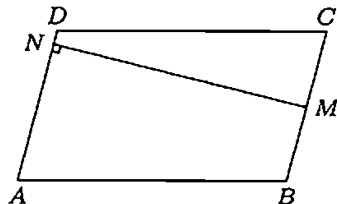


图3

由此我们可以猜想本题的结论是"梯形$ABCD$的面积等于AD与MN的乘积", 即本题需要证明$S=AD\times MN$. 思路也就由此开启, 一个梯形的面积等于两条线段的乘积, 这预示着可以将梯形转化为面积可以用两线段乘积来表示的特殊图形(如三角形、平行四边形、特殊梯形

或矩形).

2.2 平移一腰平中见奇

对于梯形问题, 常添加的辅助线是平移一腰, 即将一腰从上底的一个端点平移到另外一个端点, 从而将梯形分割成一个平行四边形和三角形! 本题也可以如法炮制:

如图4, 过点C作$CE//AD$, 交MN于点F, 交AB于点E, 连结EM.

易证明四边形$AECD$是平行四边形, 故$EC = AD, EC \perp MN$, 所以

$S = S_{\square AECD} + S_{\triangle EBC} = AD \times NF + 2S_{\triangle CEM}$

$= AD \times NF + 2 \times \frac{1}{2} \times EC \times FM = AD \times NF + AD \times FM$

$= AD \times (NF + FM) = AD \times MN.$

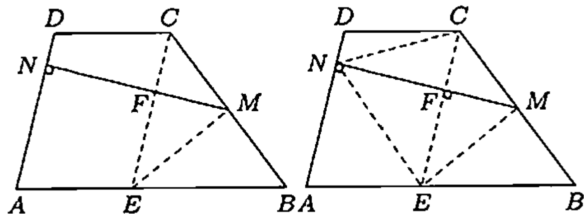


图 4

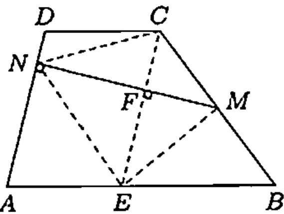


图 5

还可以考虑$CE \perp MN$, 连结CN、EN, 如图5, 四边形$NEMC$面积为$\frac{1}{2} \times MN \times CE = \frac{1}{2} \times MN \times AD$. 又梯形$ABCD$被分割成$\square AECD$和$\triangle CEB$, 而$\square AECD$的面积等于$\triangle ECN$面积的2倍, $\triangle CEB$的面积等于$\triangle CEM$面积的2倍, $\triangle ECN$的面积与$\triangle CEM$的面积之和为四边形$NEMC$的面积, 故$S = 2 \times \frac{1}{2} \times MN \times AD = AD \times MN$.

既然是平移一腰, 问题中涉及中点, 为何不过中点平移呢?

如图6, 过点M作$EF//AD$, 交DC的延长线于点E, 交AB于点F. 易证明四边形$AFED$是平行四边形, 且$\triangle CME \cong \triangle BMF$, 故$S = S_{\square AFED} = AD \times NM$.

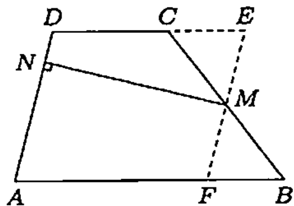


图 6

当然, 我们也能过下底的另一个端点平移一腰:

如图7, 过点B作$BE//AD$, 交DC的延长线于点E, 延长NM交BE于点F, 连结EM. 易证明四边形$ABED$是平行四边形, 故$BE = AD$, $BE \perp MN$, 所以

$S = S_{\square ABED} - S_{\triangle EBC}$
$= AD \times NF - 2S_{\triangle BEM}$
$= AD \times NF - 2 \times \frac{1}{2} \times BE \times FM$
$= AD \times NF - AD \times FM$
$= AD \times (NF - FM) = AD \times MN.$

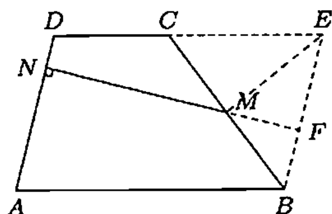


图 7

不难感受到, 即使是常用的作辅助线——平移一腰, 在发散思维的指引下也能根据另一腰上有三个不同的点而有三种平移方法, 进而得到四种不同的解法. 显然, 过中点平移一腰的解法最为简洁, 因为它将梯形割补成一个平行四边形而直接得到了结论, 如此叙述是希望读者可以体会到, 这种解法不是凭空产生的, 它是在熟知方法基础上结合题目特点自然产生出来的, 但愿通过这种解题思路的自觉而全面的分析进而获得怎样解题的感悟!

2.3 倍长中线屡试不爽

因为题目里面有中点这个条件, 所以想起几何里面遇到中点时常用的方法——倍长中线法, 结果取得了预期的良好结果, 真是屡试不爽: 本是"延长DM至点E, 使得$ME = DM$", 为了简化叙述, 如图8, 延长DM交AB的延长线于点E, 连结AM. 易证$\triangle CMD \cong \triangle BME$, 故

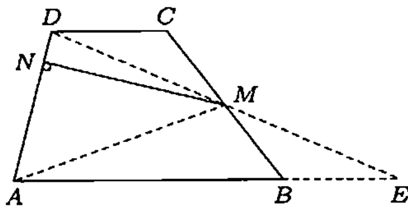


图 8

$S = S_{\triangle DAE} = 2S_{\triangle DAM} = 2 \times \frac{1}{2} \times AD \times MN = AD \times MN.$

这里也可以连结并倍长AM. 从某种意义上来说, 解题就是一个不断尝试直至成功的过程, 而尝试的起点正是我们做过的类似的题目里面所用到的方法, 及大量解题后自然产生的解题经验!

2.4 轻轻旋转魅力无穷

本着将梯形割补成特殊图形(其实是可以直接或方便表示面积的图形)的思想, 尝试着将该一般梯形割补成特殊的直角梯形, 结合梯形及中点的条件, 调动图形变换的知识, 发现这可以通过旋转达成: 如图9, 将四边形$DNMC$绕点M沿顺时针方向旋转180° 至四边形$FEMB$, 则易知四边形$NAFE$为直角梯形, 所以梯形$ABCD$的面积等于直角梯形$NAFE$的面积, 故

$$S = \frac{(EF + AN) \times NE}{2} = \frac{(ND + AN) \times 2NM}{2} = AD \times MN.$$

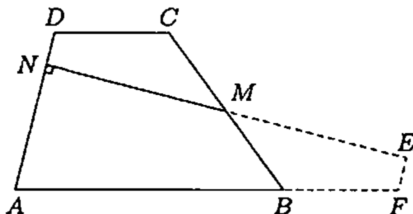


图 9

应该说, 轻轻地一个旋转, 问题的解决一下子豁然开朗, 充分展现了图形变换在解决几何问题中的独特魅力, 也是思维达到一定深度的自然流露!

2.5 再取中点又添新法

由于题目出现了一腰的中点, 故再取另外一腰的中点, 连结即为梯形的中位线, 而梯形的面积就可以由其中位线及高表示出来. 如图10, 取AD中点P, 连结PM、DM、MA, 则$PM = \frac{1}{2}(DC + AB)$, 设梯形$ABCD$的高为$h$, 易知$S = PM \times h$. 下面用两种方式来表示三角形$DAM$的面积, 一方面以$DA$为底边, 则$S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} \times AD \times MN$; 另一方面, 将其看成两个以$PM$为底、高均为$\frac{h}{2}$的三角形$DPM$和三角形$APM$的面积之和, 故$S_{\triangle ADM} = 2 \times \frac{1}{2}PM \times \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \times PM \times h$, 从而, $PM \times h = AD \times MN$, 故$S = AD \times MN$.

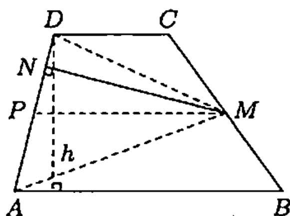


图 10

梯形的面积可以由中位线及高表示出来, 故当本题中出现一腰的中点而所求又是面积时想到再取中点构造中位线的做法就很自然而然了, 解法虽不简洁却也是一个全新的视角!

2.6 巧割善补大放异彩

由上所述$S = AD \times MN$, 这说明一定可以将梯形通过适当分割并补成一个长、宽分别为AD、MN的矩形. 如图11, 过点D作$DE \perp AD$, 且$DE = MN$, 进而作矩形$DAFE$, 并可按上述示意图(证明略), 将梯形$ABCD$分割并补成矩形$DAFE$, 则$S = AD \times DE = AD \times MN$.

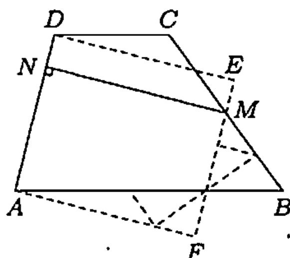


图 11

在不同几何图形面积表达式的必然关联下, 使我们拥有了一定可以将梯形补成矩形的信念, 并跟进了尝试的决心和行动, 至此数学思维之奇异美被展现得淋漓尽致, 如烟花般大放异彩!

3. 收获及感悟

这是一道看似平淡无奇的梯形问题, 却因深层次、多角度的挖掘而获得了众多貌似难以想到实又自然得来的解法, 为数学思维的锻炼提供了一个绝佳的平台! 其中, 有常规思路的大胆尝试, 有相近解法的自然喷发, 有常用方法的故技重施, 有图形变换的"神来之笔", 更有图形割补的"巧夺天工", 虽然走的路径有别但却殊途同归, 在将"梯形割补成特殊图形"的思想统领下, 众妙毕备, 异曲同工, 共奏数学思维之美!

再论比较判断法解析高考试题

430079 华中师范大学教育信息技术工程研究中心 徐章韬

1. 引言

高深的数学思想往往源于一些平凡的事实. 如张景中院士看到了一个极其显然的事实: 运动物体在一个时间段上的平均速度总是介于两个瞬时速度之间, 便由这样一个平凡的事实发展出了不用极限的微积分[1], 令人叹服! 他能做一切正确的事情[2], 林群院士如是说. 教育数学的思想对数学教学具有启发意义, 不要把我们的数学弄得太复杂了, 数学思想应当是简单、平易近人的. "兵对兵, 将对将"是人们耳熟能详的一句俗语, 数学分析里的正项级数的比较判断法: 若正项级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ 收敛, 且 $0 < b_i \leqslant a_i\,(i=1,2,\cdots n,\cdots)$, 则级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ 也收敛, 言说的就是这样一件事. 这种思想若用于不等式的证明中, 可以出乎意料地、轻易地破解一些难度较大的、学生犯愁的高考试题. 只要运用得妙, 这种貌似平常的方法实非寻常[3]. 如何恰当地分解 a_i 是运用此法的关键. 本文通过一些高考试题来说明这种思想及方法的出色运用.

2. 样例

2.1 比较判断法(I)的运用

例1 (2010年湖北高考压轴题)已知 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}+c, a>0$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

(I)用 a 表示 b、c;

(II)若 $f(x)\geqslant \ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围;

(III)证明: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\ln(n+1)+\dfrac{n}{2(n+1)}, n\geqslant 1$.

分析与略解: 不难得到 $b=a-1, c=1-2a$ 及 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$. 由命题者的本意, 由于 $f(x)=ax+\dfrac{a-1}{x}+1-2a\geqslant \ln x$ 当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时恒成立, 特别地, 有 $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\geqslant \ln x$. 令 $x=\dfrac{k+1}{k}$ (显得有点突兀), 则有 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k+1}{k}-\dfrac{k}{k+1}\right)\geqslant \ln\dfrac{k+1}{k}$, 变形有 $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)\geqslant \ln\dfrac{k+1}{k}$, 化简

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right]\geqslant\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k},$$

便得到了结论.

此题的关键是寻找 $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\geqslant \ln x$. 该题为了分解试题的难度, 在证明(III)之前增设了"台阶"(I)和(II), 体现了"拾级而上, 难度渐增"的特点. 倘若没有(I)、(II)两小题的铺陈, 如何寻找 $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\geqslant \ln x$ 呢? 可以用比较判断法来寻找.

待证结论 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\ln(n+1)+\dfrac{n}{2(n+1)}\,(n\geqslant 1)$ 可变形为: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{n}{2(n+1)}>\ln(n+1)\,(n\geqslant 1)$ (不移项变形也是可以的). 把待证结论的左边看作数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 右边看作数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 则 $a_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{n}{n+1}\right), n\geqslant 1$; $b_n=\ln\dfrac{n+1}{n}, n\geqslant 1$. 由比较判断法知, 要比较 a_n 与 b_n 的大小, 即要证明 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{n}{n+1}\right)\geqslant \ln\dfrac{n+1}{n}$. 令 $x=\dfrac{n+1}{n}$, 即得 $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\geqslant \ln x$, 这是(I)和(II)的铺陈. 有了这样一个分析之后, 为什么要令 $x=\dfrac{k+1}{k}$ 也看得很清楚了, 令 $x=\dfrac{k+1}{k}$ 不再显得突兀了.

例2 (2011年湖北高考压轴题) (I) 已知函

数 $f(x)=\ln x-x+1$, $x\in(0,+\infty)$, 求函数 $f(x)$ 的最大值.

(Ⅱ) 设 a_k、b_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 均是正数, 证明:

(1) 若 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant b_1+b_2+\cdots+b_n$, 则 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{b_n}\leqslant 1$;

(2) 若 $b_1+b_2+\cdots+b_n=1$, 则 $\frac{1}{n}\leqslant b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdot\cdots\cdot b_n^{b_n}\leqslant b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$.

分析与略解: 不难求得 $f(x)$ 的最大值为0, 即 $\ln x\leqslant x-1$. 同例2的分析一样, (Ⅰ)是为(Ⅱ)作铺陈的, 倘若没有(Ⅰ)的铺陈, 如何证明(Ⅱ)呢? 由"执果索因"的证明方法知

$$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{b_n}\leqslant 1\Longleftrightarrow\sum_{k=1}^{n}b_k\ln a_k\leqslant 0,$$

由比较判断法知, 若 $b_k\ln a_k\leqslant c_k\leqslant 0$, 问题就解决了. 由条件 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant b_1+b_2+\cdots+b_n$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_k-1)b_k\leqslant 0$, 故可令 $c_k=(a_k-1)b_k$, 这时 $b_k\ln a_k\leqslant c_k\leqslant 0$, 即 $b_k\ln a_k\leqslant(a_k-1)b_k\leqslant 0$, 化简得 $\ln a_k\leqslant a_k-1$. 令 $x=a_k$, 即有 $\ln x\leqslant x-1$. 这就是(Ⅰ)的铺陈.

比较判断法里面蕴含的"分解——配对"有助于(Ⅱ)之(2)证明思路的寻找.

欲证 $b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdot\cdots\cdot b_n^{b_n}\leqslant b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$, 令 $S=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$, 待证结论可变形为 $\frac{b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdot\cdots\cdot b_n^{b_n}}{S}\leqslant 1$.

注意到 $b_1+b_2+\cdots+b_n=1$, 采用"分解——配对", 故有

$$\left(\frac{b_1}{S}\right)^{b_1}\left(\frac{b_2}{S}\right)^{b_2}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{b_n}{S}\right)^{b_n}\leqslant 1.$$

用综合法书写上述过程即是:

令 $S=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$, 则

$$b_1\frac{b_1}{S}+b_2\frac{b_2}{S}+\cdots+b_n\frac{b_n}{S}=1=b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

由(Ⅱ)之(1)有

$$\left(\frac{b_1}{S}\right)^{b_1}\left(\frac{b_2}{S}\right)^{b_2}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{b_n}{S}\right)^{b_n}\leqslant 1,$$

化简即得

$$b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdot\cdots\cdot b_n^{b_n}\leqslant S^{b_1+b_2+\cdots+b_n}=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2.$$

欲证 $\frac{1}{n}\leqslant b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdot\cdots\cdot b_n^{b_n}$, 注意到 $b_1+b_2+\cdots+b_n=1$, 故即是证

$$\frac{1}{n^{b_1+b_2+\cdots+b_n}}\leqslant b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdot\cdots\cdot b_n^{b_n}.$$

采用"分解——配对", 待证结论可变形为

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{b_1}\left(\frac{1}{n}\right)^{b_2}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{b_n}\leqslant 1.$$

用综合法书写上述过程即是: 因为

$$b_1\frac{1}{nb_1}+b_2\frac{1}{nb_2}+\cdots+b_n\frac{1}{nb_n}=1=b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

由(Ⅱ)之(1)有

$$\left(\frac{1}{nb_1}\right)^{b_1}\left(\frac{1}{nb_2}\right)^{b_2}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{nb_n}\right)^{b_n}\leqslant 1,$$

化简即得 $\frac{1}{n}\leqslant b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdot\cdots\cdot b_n^{b_n}$.

例3 (2008年陕西高考压轴题) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{3}{5}$, $a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明对任意的 $x>0$, $a_n\geqslant\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$, $n=1,2,\cdots$.

(3) 证明: $a_1+a_2+\cdots+a_n>\frac{n^2}{n+1}$.

分析与略解: 不难求得 $a_n=\frac{3^n}{3^n+2}$. 按命题者本意, (2)是(3)之铺陈, 是要用(2)来证(3)的, 但是命题者给出的答案太出乎意料了. 不要(2)之铺陈, 用比较判断法也能证明(3). 记 $\frac{n^2}{n+1}$ 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和, 可求得

$$b_n=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=1,\\ 1-\frac{1}{n(n+1)}, & n\geqslant 2,\end{cases}$$

$$a_1=\frac{3}{5}>b_1=\frac{1}{2},$$

即要证 $3^n>2n^2+2n-2\ (n\geqslant 2)$. 虽然 a_2 不大于 b_2, 但有 $a_1+a_2\geqslant b_1+b_2$; 故要把这两项合成一项. 对 $n\geqslant 3$, $3^n=(1+2)^n\geqslant 1+2C_n^1+4C_n^2+8C_n^3>2n^2+2n-2$, 故

$$(a_1+a_2)+\sum_{k=3}^{n}a_k>(b_1+b_2)+\sum_{k=3}^{k}b_k,$$

即得待证结论.

例4 (2006年福建高考压轴题) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(Ⅰ) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ) 证明: $\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<$

$\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

分析与略解: 不难求得$a_n=2^n-1\,(n\in\mathbf{N}^*)$. 把$\frac{n}{2}$看作数列$\{b_n\}$的前$n$项和, 则$b_n=\frac{1}{2}\,(n\geqslant 1)$.

因为$\frac{a_{n+1}}{2}=\frac{2a_n+1}{2}>a_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以$\frac{a_k}{a_{k+1}}<\frac{1}{2}\,(k=1,2,\cdots,n)$, 故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2},$$

即得待证式的右半部分. 对待证式的左部分, 不能如此拆分$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}$, 但注意到

$$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}\cdot 1<\frac{n}{2}-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k},$$

故若有$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^k}<\frac{a_k}{a_{k+1}}$即可, 此式不难证得.

这种把常数用一个无穷递缩等比数列表示出来的技法在文[4]出现过, 曾用于解析2002年高考压轴题. 这种技法不止一次地出现过, 看下面一道试题.

例5 (2011年天津高考压轴题) 已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$满足$b_{n+1}a_n+b_na_{n+1}=(-2)^n+1$, $b_n=\frac{3+(-1)^{n-1}}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 且$a_1=2$.

(1) 求a_2、a_3的值;

(2) 设$c_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明$\{c_n\}$是等比数列;

(3) 设S_n为$\{a_n\}$的前n项和, 证明$\frac{S_1}{a_1}+\frac{S_2}{a_2}+\cdots+\frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}}+\frac{S_{2n}}{a_{2n}}\leqslant n-\frac{1}{3}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

分析与略解: 不难求得

$$a_{2k-1}=2^{2k-1},\ a_{2k}=\frac{1}{2}-2^{2k-1},$$

$$S_{2k-1}=\frac{k-1}{2}+2^{2k-1},$$

$$S_{2k}=\frac{k}{2}, k\in\mathbf{N}^*.$$

由于左边涉及有$2n$项, 故不妨记$d_k=\frac{S_{2k-1}}{a_{2k-1}}+\frac{S_{2k}}{a_{2k}}\,(k\in\mathbf{N}^*)$ (这种把两项看作一项的方法在处理2004年全国高考卷(I)的压轴题时用到过, 详见文[3]), 则$d_k=1-\frac{1}{4^k}-\frac{k}{4^k(4^k-1)}$.

将$n-\frac{1}{3}$看作是数列$\{d'_n\}$的前n项的和, 则

$$d'_k=\begin{cases}1-\frac{1}{3}, & k=1,\\ 1, & k\geqslant 2.\end{cases}$$

$d_1=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4(4-1)}=1-\frac{1}{3}=d'_1$, 而$d_k<d'_k$, $k\geqslant 2$, 故结论成立.

2.2 比较判断法(Ⅱ)的运用

例6 (1985年上海高考试题) 对于一切大于1的自然数n, 证明: $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$.

分析与略解: 令$a_n=1+\frac{1}{2n-1}\,(n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 1)$, 则$\{a_n\}$的前$n$项之积为

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right).$$

待证式等价于$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)>\sqrt{2n+1}$. 把$\sqrt{2n+1}$看作数列$\{b_n\}$的前$n$项之积. 则$b_1=\sqrt{3}$, $b_n=\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2(n-1)+1}}=\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1}}$, $n\geqslant 2$, 故$b_n=\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1}}$, $n\geqslant 1$.

现比较a_k与b_k的大小. 易证$a_k=1+\frac{1}{2k-1}=\frac{2k}{2k-1}>\frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k-1}}=b_k$, 故

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)>\prod_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k-1}}=\sqrt{2n+1},$$

故$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$.

类似地, 可以证明

(2009年广东高考压轴题) 已知曲线$C_n: x^2-2nx+y^2=0, n=1,2\cdots$, 从点$P(-1,0)$向曲线$C_n$引斜率为$k_n\,(k_n>0)$的切线$l_n$, 切点为$P_n(x_n,y_n)$.

(1) 求数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$通项公式;

(2) 证明: $x_1\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\frac{x_n}{y_n}$.

(2009年山东高考压轴题) 等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 已知对任意的$n\in\mathbf{N}^*$, 点(n,S_n)均在函数$y=b^x+r\,(b>0$且$b\neq 1$, b、r均为常数$)$的图像上.

(1) 求r的值;

(2) 当$b=2$时, 记$b_n=2(\log_2 a_n+1), n\in\mathbf{N}^*$, 证明: 对任意的$n\in\mathbf{N}^*$不等式$\frac{b_1+1}{b_1}+\frac{b_2+1}{b_2}+\cdots+\frac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{n+1}$成立.

2.3 比较判断法(I)和比较判断法(II)的联合运用

例7 (2008年福建高考压轴题) 已知函数$f(x)=\ln(x+1)-x$.

(1) 求$f(x)$的单调区间;

(2) 记$f(x)$在区间$[0,n]$ $(n\in\mathbf{N}^*)$上的最小值为b_n, 令$a_n=\ln(1+n)-b_n$. ① 如果对一切n, 不等式$\sqrt{a_n}<\sqrt{a_{n+2}}-\frac{c}{\sqrt{a_{n+2}}}$恒成立, 求实数$c$的取值范围. ② 求证: $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1a_3}{a_2a_4}+\cdots+\frac{a_1a_3\cdot\cdots\cdot a_{2n-1}}{a_2a_4\cdot\cdots\cdot a_{2n}}<\sqrt{2a_n+1}-1$.

分析与略解: 由(1)与(2)不难求得$a_n=n$. 第(2)的 ② 即是要证

$$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}<\sqrt{2n+1}-1.$$

令$b_k=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2k)}$, 把$\sqrt{2n+1}-1$看作数列$\{c_n\}$的前$n$项之和, 则

$$c_n=\begin{cases}\sqrt{3}-1, & n=1,\\ \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}, & n\geqslant2.\end{cases}$$

$b_1<c_1$是显然的, 现要比较b_k与c_k $(k\geqslant2)$的大小.

令$b'_k=\frac{2k-1}{2k}$, 则b_k可看作数列$\{b'_k\}$的前k项之积. 而$c_k=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}=\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}>\frac{2}{\sqrt{2k+1}}(k\geqslant2)$.

令$d_k=\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ $(k\geqslant1)$, 故只要证明

$$b_k=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2k)}<d_k=\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

即可.

令$d'_k=\frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}$ $(k\geqslant1)$, 则d_k可看作是数列$\{d'_k\}$的前k项之积.

又$b'_k=\frac{2k-1}{2k}<\frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}=d'_k$ $(k\geqslant1)$是显然的. 故$b_k=\prod\limits_{k=1}^{n}b'_k<\prod\limits_{k=1}^{n}d'_k=d_k<c_k$, 所以有$\sum\limits_{k=1}^{n}d_k<\sum\limits_{k=1}^{n}c_k$, 待证式得证.

2.4 比较判断法的变式应用

a_n也可以看作某个数列的前n项和, 即a_n可以分解为: $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$. 在这个观点之下, 也可以对单个的$a_n$使用比较判断法.

例8 (2005年湖北高考压轴题) 已知不等式$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$, 其中$n$为大于2的整数, $[\log_2 n]$表示不超过$\log_2 n$的最大整数. 设数列的$\{a_n\}$各项为正, 且满足$a_1=b>0$, $a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}, n=2,3,\cdots$, 证明

$$a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}, n=2,3,4,5\cdots.$$

分析与略解: 待证结论$a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$可变形为$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{b}+\frac{[\log_2 n]}{2}$,

又$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}\right)+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)$, 注意到已知条件$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$,

故如果有$\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}\right)+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)\geqslant\frac{1}{b}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, ……(*)

则待证结论成立. 又由比较判断法, 若有

$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geqslant\frac{1}{n}$ $(n\geqslant2)$, ……(**)

则(*)式必然成立.

化简(**)式得$\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{n+a_{n-1}}{na_{n-1}}, n=2,3,\cdots$, 这即是已知条件. 用综合法书写上述过程即是:

当$n\geqslant2$时, $0<a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$,

所以$\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{n+a_{n-1}}{na_{n-1}}$, 即$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geqslant\frac{1}{n}$.

$$\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\frac{1}{a_1}\geqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{a_1}.$$

又由已知条件$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$,

故有$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{b}+\frac{[\log_2 n]}{2}$,

故$a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}, n=2,3,4,5,\cdots$.

类似地, 可以解决

(2005年重庆高考压轴题) 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$, 且$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)a_n+\frac{1}{2^n}\ (n\geqslant 1)$.

(1) 用数学归纳法证明: $a_n\geqslant 2\ (n\geqslant 2)$;

(2) 已知不等式$\ln(x+1)<x$对$x>0$成立, 证明: $a_n<e^2, n\geqslant 1$, 其中无理数$e=2.71828\cdots$.

3. 结语

早在二十年前, 我国首批十八位博士之一的张筑生先生就提倡"让解题的思路来得自然些"[5]. 解法的自然源于数学思想的自然, 因为数学思想本来就是自然而平和的[6]. 本文所提及的方法并不高深, 甚至有点平凡, 然而平凡的方法用到极致便是不平凡了. 这点在张景中院士的《直来直去的微积分》中体现最明显了, 张院士用平凡简单、又可能出乎预料的方法实现了拉格朗日的梦想[1]. 我们应发展这样的方法, 而不是追求高深的技巧. 值得指出的是, 若$A_i\geqslant B_i, i=1,2,\cdots,n$, 则$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}B_i$, 但有时虽有$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}B_i$, 但不能逆用本法得出$A_i\geqslant B_i$.

参考文献

[1] 张景中. 直来直去的微积分 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[2] 林群. 谈谈张景中的教育数学 [J]. 数学通报, 2006 (6): 5-6.

[3] 徐章韬. 比较判断法解析高考试题 [J]. 数学教学, 2009 (2): 43-45.

[4] 徐章韬, 刘红. 2002年高考压轴题的解析及探源 [J]. 数学通讯, 2002 (19): 33.

[5] 张筑生. 让解题的思路来得自然 [J]. 中等数学, 1991 (6): 13-15.

[6] 张奠宙. 数学思想是自然而平和的 [J]. 人民教育, 2006 (10): 28-29.

(上接第4-8页)

的学生表示能够复述, 36%的学生表示有印象. 33%的学生课后思考过上课时拼凑纸片环节所得到的曲线和曲边四边形两种情形, 并能理解为什么.

用立体几何模型探究椭圆的定义, 给学生留下深刻的印象, 并能在课后复述整个过程, 说明学生已经深刻理解定义. 虽然探究环节花的时间比较长, 但是学生的体验和感受是很宝贵的收获.

(4) 关于本节课的授课方式, 82.7%的学生认为, 若有条件, 教师应多采用.

著名教育家第斯多惠说过: "一个坏的教师奉送真理, 一个好的教师则教人发现真理". 普通高中数学课程标准也指出, 教学要体现数学知识的发生发展过程, 促进学生的自主探索. 教师应该注意创设情境, 从具体事实出发, 展现数学知识的发生、发展过程, 使学生能够从中发现问题、提出问题, 经历数学的发现和创造过程, 了解知识的来龙去脉. 发生教学法与第斯多惠的"基础教学法"一脉相承, 与新课程理念若合符节. 实践表明, 采用发生法讲授椭圆的定义, 激发了学生的学习兴趣, 创造了学生的学习动机, 加深了学生的概念理解, 得到了学生的普遍认同.

参考文献

[1] Apollonius. Conics (translated by R. C. Taliaferro). In: R. M. Hutchins (ed.), Great Books of the Western World (11). Chicago: Encyclopaedia Britannica, Inc., 1982. 780-792.

[2] Maanen, J. van. Seventeenth instruments for drawing conic sections [J]. The Mathematical Gazette, 1992, 76 (476): 222-230.

[3] L'Hospital, M. de. Traité Analytique des Sections Coniques [M]. Paris: Montalant, 1720. 22-25.

[4] 苏惠玉. HPM与高中几何教学: 以圆锥曲线的正焦弦为例 [J]. HPM通讯, 2008 (2-3): 1-11.

题设最好别多余

100071 北京市丰台第二中学 甘志国

下面这道题是某重点高中2012届高三10月联考题目, 答案是(B).

题1 如图1所示, D、E分别是$\triangle ABC$边AC、BC的中点, 点O在线段DE上, 且有$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 则$\triangle AEC$与$\triangle AOC$的面积之比为……( )

(A) 2; (B) $\frac{2}{3}$; (C) 3; (D) $\frac{5}{3}$.

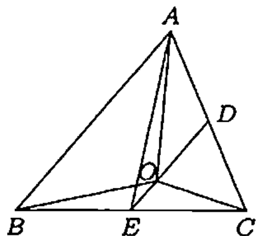


图1

笔者看到这道题后, 不是盲目寻求答案, 而是按照"思、探、练、变、提" 的步骤研究这道题的解法[1], 发现这道题目的题设有多余的部分:

当$\triangle ABC$确定后, 由$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$知点$O$也是确定的: 在平面直角坐标系中, 可设$A(6x_1,6y_1)$、$B(6x_2,6y_2)$、$C(6x_3,6y_3)$, 得

$$O(x_1+2x_2+3x_3,y_1+2y_2+3y_3).$$

当$\triangle ABC$确定后, 边AC、BC的中点D、E也是确定的, 但本题能保证题设"点O在线段DE上"一定成立吗? 这是需要验证的: 在平面直角坐标系中, 可设$A(6x_1,6y_1)$、$B(6x_2,6y_2)$、$C(6x_3,6y_3)$, 由D、E分别是$\triangle ABC$边AC、BC的中点得 $D(3x_1+3x_3,3y_1+3y_3)$、$E(3x_2+3x_3,3y_2+3y_3)$, 所以可得$\overrightarrow{DO}=2\overrightarrow{OE}$, 即题设"点$O$在线段$DE$上"一定成立. 幸好, 题设是相容的!

笔者认为, 题设最好别多余! 题设若是相容的, 该题有解, 但作为解答题时要检验题设相容, 挺麻烦; 题设若是不相容的, 该题无解, 但作为大题, 解答时要检验出题设不相容, 也挺麻烦的.

可把题1改为下面的题2或题3, 题设就不多余了.

题2 如图1所示, E是$\triangle ABC$的边BC的中点, 点O满足$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 则$\triangle AEC$与$\triangle AOC$的面积之比为……( )

(A) 2; (B) $\frac{2}{3}$; (C) 3; (D) $\frac{5}{3}$.

解: 如图2, 作$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'}=3\overrightarrow{OC}$得$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{0}$, 所以点$O$是$\triangle ABC$是的重心, 得$S_{\triangle OAB'}=S_{\triangle OB'C'}=S_{\triangle OAC'}$, 即$2S_{\triangle OAB}=6S_{\triangle OBC}=3S_{\triangle OAC}$.

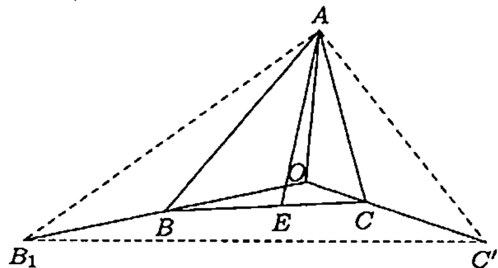


图2

设$S_{\triangle OAC}=2$, 得$S_{\triangle OAB}=3$, $S_{\triangle OBC}=1$, $S_{\triangle ABC}=6$. 所以$S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=3$, $\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AOC}}=\frac{3}{2}$.

题3 如图1所示, D、E分别是$\triangle ABC$的边AC、BC的中点, 点O是线段DE的靠近点E的三等分点, 则$\triangle AEC$与$\triangle AOC$的面积之比为……( )

(A) 2; (B) $\frac{2}{3}$; (C) 3; (D) $\frac{5}{3}$.

解: 如图3, 过点O作$OH\perp AC$于点H, 过点E作$EH'\perp AC$于点H', 可得$\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AOC}}=\frac{EH'}{OH}=\frac{ED}{OD}=\frac{3}{2}$.

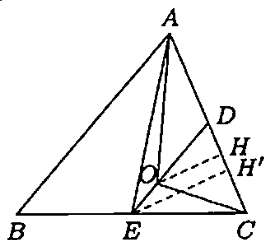


图 3

题4 (文[2]的例6)求证: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n<n+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}$ ($n\in\mathbf{N}$且$n\geqslant 2$).

原解答: 构造函数$f(x)=\frac{1-x}{x}+\ln x$, 则$f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$, 得$f(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数.

所以, 当$n\geqslant 2$时, $f\left(\frac{n}{n-1}\right)=\ln\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n}>f(1)=0$, 得$\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1}$.

所以$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}=\ln n$.

设$g(x)=\ln x-x$, 则$g'(x)=\frac{1}{x}-1$, 所以$g(x)$在$[1,+\infty)$上是减函数.

当$n\geqslant 2$时, $g\left(\frac{n}{n-1}\right)=\ln\frac{n}{n-1}-\frac{n}{n-1}<g(1)=-1<0$, 即$\ln\frac{n}{n-1}<1+\frac{1}{n-1}$.

所以$\ln n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}<1+\frac{1}{1}+1+\frac{1}{2}+\cdots+1+\frac{1}{n-1}=n+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}$.

评注: 利用函数单调性和比较大小是常见的证明不等式的方法, 特别是在引入导数后, 单调性的应用更加普遍.

对题4及其参考答案的分析: 由我们耳熟能详的"指数爆炸, 直线上升, 对数缓慢"可猜测出结论"$\ln n<n\,(n\in\mathbf{N}^*)$", 所以欲证结论的右边可能有简洁证法. 解答中构造的函数是不易想到的, 所以应当寻求本题的常规证法. 文[3]对该题给出的解法就很常规:

用导数极易证得$\ln x\leqslant x\,(x\geqslant 1)$, 由其立得

$\ln n<n<n+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}$ ($n\in\mathbf{N}$且$n\geqslant 2$).

故题4右边的不等式也有"题设"多余之嫌.

左边用数学归纳法及导数也极易解决(无须构造函数并用累加法):

当$n=2$时显然成立.

假设$n=k$时成立, 即$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}<\ln k$ ($k\in\mathbf{N}$且$k\geqslant 2$). 下证$n=k+1$时不等式成立, 即$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)$ ($k\in\mathbf{N}$且$k\geqslant 2$). 只需证明

$\ln k+\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)$, 即证$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)>\frac{1}{k+1}$, 这只需用导数证明

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}>0\,(x>0).\cdots\cdots\cdots ①$$

用导数可证$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$ $(x>0)$是减函数, 又$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, 所以$g(x)>0$, 得①成立, 所以要证结论的左边也成立!

题5[3] 设$\{a_n\}$是由正数组成的数列, 其前n项和是S_n, 且对于$n\in\mathbf{N}^*$, 都有$8S_n=(a_n+2)^2$.

(1) 写出数列$\{a_n\}$的前3项;

(2) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(3) 设$b_n=\frac{4}{a_na_{n+1}}$, T_n是数列$\{b_n\}$的前n项和, 若$T_n>\frac{m}{20}$对于$n\in\mathbf{N}^*$恒成立, 求正整数m的最大值.

参考答案: (1) $a_1=2$, $a_2=6$, $a_3=10$.

(2) $a_n=4n-2$.

(3) $b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,

$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$,

$(T_n)_{\min}=T_1=\frac{1}{3}$.

$T_n>\frac{m}{20}$对于$n\in\mathbf{N}^*$恒成立

$\Longleftrightarrow (T_n)_{\min}=T_1=\frac{1}{3}>\frac{m}{20}$

$\Longleftrightarrow m<6\frac{2}{3}$, 所以所求$m$的最大值是6.

文[3]对第(3)小题的注记: 因为$b_n=\frac{4}{a_na_{n+1}}$, $a_n=4n-2>0$, $a_{n+1}=4n+2>0$, 所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$的各项$b_1,b_2,\cdots,b_n$都是正数,

$(T_n)_{\min}=T_1$. 说明此题不需要求T_n, 这可能是出题者始料未及的, 因为命题者的意图是考查裂项法求和与恒成立问题.

出现此情形的原因也是题设有多余的部分.

题6 (2009年全国高考湖北卷理科19(2)) 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=-a_n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$($n$为正整数), 令$c_n=\frac{n+1}{n}a_n$, $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$, 试比较T_n与$\frac{5n}{2n+1}$的大小, 并予以证明.

参考答案: 先求出a_n, 再求出c_n, 用错位相减法求出T_n, ……

对题6参考答案的分析: 这道高考题及其解答均常规自然, 能否有不同解呢? 我们先看文[4]给出的简解:

由题意可得

$$a_n=\frac{n}{2^n}, T_n=2\times\frac{1}{2}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

所以

$$T_1=1<\frac{5\times1}{2\times1+1}, T_2=\frac{7}{4}<\frac{5\times2}{2\times2+1}, T_3=\frac{9}{4}>\frac{5\times3}{2\times3+1}.$$

当$n\geqslant4$时, $T_n\geqslant\frac{41}{16}\geqslant\frac{5}{2}>\frac{5n}{2n+1}$.

所以, 当$n=1,2$时, $T_n<\frac{5n}{2n+1}$;

当$n\geqslant3$时, $T_n>\frac{5n}{2n+1}$.

我们再来分析产生这种简解的原因: $T_n=3-\frac{n+1}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{n+1}{2^n}\right)=3>\frac{5}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{2n+1}$. 说明当$n\to\infty$时, $T_n\to3$, 所以取$T_n=2\times\frac{1}{2}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$中的前若干项的和就可大于$\frac{5}{2}$, 因而出现了文[4]的简洁证法. 出现此情形的原因还是题设有多余的部分.

所以, 可将此问题作如下改动: 试比较T_n与$\frac{6n}{2n+1}$的大小, 并予以证明.

解: 因为$T_n=3-\frac{n+1}{2^n}$, $\frac{6n}{2n+1}=3-\frac{3}{2n+1}$, 所以只需比较$\frac{n+3}{2^n}$与$\frac{3}{2n+1}$的大小.

当$n=1, 2, 3, 4$时, 可得$\frac{n+3}{2^n}>\frac{3}{2n+1}$; 下证当$n\geqslant5$时, $\frac{n+3}{2^n}<\frac{3}{2n+1}$, 即证$2n^2+7n+3<3\times2^n$, 这用数学归纳法极易获证, 下面用二项式定理来证:

$$2^n=(1+1)^n\geqslant C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^{n-1}+C_n^n\ (\text{因为}n\geqslant5)$$
$$=2\left[1+n+\frac{n(n-1)}{2}\right]=n^2+n+2,$$

所以只需证明$2n^2+7n+3<3(n^2+n+2)$, 即证$(n-1)(n-3)>0$, 这由$n\geqslant5$立得.

所以, 当$n=1, 2, 3, 4$时, $T_n<\frac{6n}{2n+1}$;

当$n\geqslant5$时, $T_n>\frac{6n}{2n+1}$.

(因为$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)=3=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n}{2n+1}$, 所以不会出现取$T_n=2\times\frac{1}{2}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$中的前若干项的和就可大于3, 又由$3>\frac{6n}{2n+1}$获得文[4]那样的简证.)

笔者建议, 编拟数学题时不要让题设有多余的部分, 更不要出现题设多余甚至互不相容的情形.

普通高中课程标准实验教科书《数学4·A版·必修》(人民教育出版社2007年第2版)(下简称教科书)第46页习题1.4的第10题是[5]:

题7 设函数$f(x)$($x\in\mathbf{R}$)是以2为最小正周期的周期函数, 且$x\in[0,2]$时$f(x)=(x-1)^2$. 求$f(3)$、$f\left(\frac{7}{2}\right)$的值.

与教科书配套使用的《教师教学用书》第44页给出的答案是:

由于$f(x)$以2为最小正周期, 所以对任意$x\in\mathbf{R}$, 有$f(x+2)=f(x)$. 于是:

$$f(3)=f(1+2)=f(1)=(1-1)^2=0,$$
$$f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}+2\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}-1\right)^2=\frac{1}{4}.$$

变式1 设周期函数$f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$的一个周期为2, 且$x\in[0,2]$时$f(x)=(x-1)^2$. 求$f(0),f(2)$.

解法1: 直接运用题设"$x\in[0,2]$时$f(x)=(x-1)^2$"求解: $f(0)=1,f(2)=1$.

解法2: 先运用题设"$x\in[0,2]$时$f(x)=(x-1)^2$"只求$f(0),f(2)$中的一个, 再由题设解"周期函数$f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$的一个周期为2"求出另一个: $f(0)=1,f(2)=1$.

变式2 设周期函数$f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$的一个周期为2, 且$x\in[0,2]$时$f(x)=x^2$. 求$f(0),f(2)$.

解法1: 同变式1的解法1, 得

$f(0)=0,f(2)=4$.

解法2: 同变式1的解法1, 得

$f(0)=0,f(2)=f(0)=0$.

解法3: 同变式1的解法1, 但先求$f(2)$, 得

$f(2)=4$, $f(0)=f(2)=4$.

这三种解法均无误, 为何会得到三种不同的结果呢? 那只有一种可能: 就是题目本身有互相矛盾的条件! 正是如此. 若周期函数$f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$的一个周期为2, 则只需要知道$f(x)$在一个周期上的解析式就可以确定所有函数值. 而本题中$f(x)$的一个周期可选自变量$x\in[0,2)$或$x\in(0,2]$, 但不能选$x\in[0,2]$. 若选$x\in[0,2)$则下一个周期是$x\in[2,4)$, 若选$x\in(0,2]$则下一个周期是$x\in(2,4]$, 这都是正确的; 若选$x\in[0,2]$, 则下一个周期是什么呢? 因为周期函数在相邻两个周期上的函数图象形状是相同的, 但位置不同(可以通过左右平移使之重合), 所以下一个周期只能是$x\in[2,4]$, 那么$x=2$时的图象在哪一个周期呢? 总不能说同在两个周期上吧! 所以说, 是连续函数的周期函数在一个周期上的图象自变量的取值范围不能是闭区间, 只能是半闭半开区间.

而这一点, 教科书上也没注意. 教科书第55页练习第2题是"画出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图(有条件的请用计算器或计算机检验): (1) $y=\frac{1}{2}\sin x$; ……", 第70页第16题是"画出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图: (1) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$, $x\in\mathbf{R}$; ……", 应当把这里的"函数在长度为一个周期的闭区间上的简图"改为"函数在一个周期上的简图".

所以应把变式2题目中的"$x\in[0,2]$"改为"$x\in[0,2)$"(按解法2求解)或"$x\in(0,2]$" (按解法3求解).

为什么变式1的题目没有错呢? 因为周期函数$f(x)$的周期是2, 所以只需要知道$f(x)$在$x\in[0,2)$或$x\in(0,2]$上的解析式就可以确定$f(x)$的所有函数值, 而本题$x\in[0,2]$上的解析式, 说明题目条件有多余, 而多余的条件应当是相容的(即不会产生矛盾): 必须有$f(0)=f(2)$, 而本题满足这一点!

题8 已知函数$f(x)$对一切x_1、$x_2\in\mathbf{R}$都有$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2)$, 且$f(x+5)=f(x-3)$, 若$f(6)+f(15)=1$, 则$f(2010)$的值是……( )

(A) 1; (B) −1; (C) 22; (D) −2010.

解: 由题设得$f(0)+f(0)=f(0)$,

所以$f(0)=0$.

由$f(x)+f(-x)=f(x-x)=f(0)=0$, 得$f(-x)=-f(x)$, 所以$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数.

由$f(x+5)=f(x-3)$得$f(x+8)=f(x)$, 所以$f(x)$是以8为周期的函数, 得

$f(16)=f(8\times2+0)=f(0)=0$,

$f(6)=1-f(5)=1-f(-1)=1+f(1)=1$,

$f(2010)=f(8\times252-6)=f(-6)=-f(6)=-1$,

选(B).

此题是一道错题.

由题设"函数$f(x)$对一切x_1、$x_2\in\mathbf{R}$都有$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2)$"可得

$f(x_1+x_2+x_3)=f[x_1+(x_2+x_3)]=f(x_1)+f(x_2+x_3)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$,

同理, 有

$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)=f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

故可得$f(n)=nf(1)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

解法1: 由$f(6)+f(15)=1$, 得

$6f(1)+15f(1)=1, f(1)=\frac{1}{21}$,

所以 $f(2010)=2010f(1)=\frac{670}{7}$.

解法2: 由$f(x+5)=f(x-3)$得$f(x+$

$8) = f(x), f(1) = f(9) = 9f(1), f(1) = 0$, 所以 $f(2010) = 2010f(1) = 0$.

从这里可以看出这道题出错的原因是两个条件“$f(x+5)=f(x-3)$”、“$f(6)+f(15)=1$”不相容.

在编拟数学题目时, 一定要注意题目的条件不多余为好, 若有多余的条件它们应当是相容的. 另外, 在解题时, 仅仅求出了答案还不能算是完整解答(哪怕求解过程中的每一步都理由充分), 还要检验求出的答案要满足题目的所有条件(也包括题目的所有条件应当是相容的). 我们平时解题时很少做这种检验, 特别是检验题目的所有条件应当是相容的(尤其是多余的条件应当相容), 从这一点来说, 教科书的这道习题(即题7)虽说很巧(多余的条件是相容的), 但这样的题目也有不足(解答时需要检验多余的条件相容), 也不具有教科书上的习题应具有的代表性、典型性、广泛性, 建议把该题中的“$x \in [0,2]$”改为“$x \in [0,2)$”.

参考文献

[1] 甘志国."思、探、练、变、提"的解题教学[J]. 中小学数学, 2009(12): 7.

[2] 袁如标. 在证明不等式中感受函数的魅力[J]. 中学数学月刊, 2008(9): 38-39.

[3] 甘志国. 改成小于多好—例谈编拟数学题要注意考查知识的有效性[J]. 中学数学(高中), 2010(8): 54-56.

[4] 汪文国. 对2009年湖北数学高考理科第19题的一孔之见[J]. 数学通讯, 2009(7下): 43.

[5] 甘志国. 是很巧, 还是有不足? [J]. 中学生数学, 2010(8上): 4-5.

(上接第4-17页)

$\therefore \dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1)\cdot 1 = n$, $\therefore a_n = \dfrac{1}{n}$.

点评: 上述两题都出现了$a_{n+1}a_n$连续两项相乘, 例2用的是因式分解的方法, 例3用的是同除以$a_{n+1}a_n$的方法. 两种方法都可以将其变成我们熟悉的形式, 因此出现$a_{n+1}a_n$时求通项, 运用此两法便可快速得出结果.

2. 隔项问题

2.1 含有“$a_{n+2}-a_n$”

例4 在数列$\{a_n\}$中, $a_1 = 1, a_2 = 3$, 且$a_{n+2} - a_n = 2^{n+1}$, 求a_n.

解法1: 此题对n分奇偶性讨论, 可以得出结果, 方法参照例1, 这里不再赘述.

解法2: $a_{n+2} - a_n$

$= (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) = 2^{n+1}$.

令 $b_n = a_{n+1} - a_n, b_{n+1} + b_n = 2^{n+1}$,

$\therefore (-1)^{n+1}b_{n+1} - (-1)^n b_n = (-2)^{n+1}$.

令$c_n = (-1)^n b_n$,

$$\therefore c_n = c_1 + (c_2 - c_1) + (c_3 - c_2) + \cdots + (c_n - c_{n-1})$$

$$= \frac{-2[1-(-2)^n]}{1-(-2)} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-2)^{n+1},$$

$\therefore b_n = \dfrac{2}{3}(-1)^{n+1} + \dfrac{2}{3}\cdot 2^n$,

即$b_n = a_{n+1} - a_n = \dfrac{2}{3}(-1)^{n+1} + \dfrac{2}{3}\cdot 2^n$,

$\therefore a_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}$.

点评: 对于出现“$a_{n+2}-a_n$”的隔项问题合适地选择上述两种方法便可迎刃而解.

2.2 含有“$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$”

例5 已知$a_1 = 1, a_2 = 2$, 且$\dfrac{a_{n+2}}{a_n} = 2^n$, 求$a_n$.

解: (1)当$n = 2k$时, $\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = 2^{2k}$,

$$\therefore a_{2k} = a_2 \cdot \frac{a_4}{a_2}\cdot\frac{a_6}{a_4}\cdot \cdots \cdot \frac{a_{2k}}{a_{2k-2}}$$

$$= 2\cdot 2^2\cdot 2^4\cdot \cdots \cdot 2^{2k-2}$$

$$= 2^{k^2-k+1},$$

即$a_n = 2^{\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}+1}$ (n为偶数).

(2)当$n = 2k-1$时, $\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = 2^{2k-1}$,

$$a_{2k-1} = a_1 \cdot \frac{a_3}{a_1}\cdot\frac{a_5}{a_3}\cdot \cdots \cdot \frac{a_{2k-1}}{a_{2k-3}}$$

$$= 1\cdot 2^1\cdot 2^3\cdot \cdots \cdot 2^{2k-3}$$

$$= 2^{(k-1)^2},$$

即$a_n = 2^{\frac{(n-1)^2}{4}}$ (n为奇数).

$$\therefore a_n = \begin{cases} 2^{\frac{(n-1)^2}{4}}, & n=2k-1, \\ 2^{\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}+1}, & n=2k, \end{cases} (k\in\mathbf{N}^*).$$

点评: 对于出现“$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$”的隔项问题, 需要分奇偶性讨论得出答案.

数学问题与解答

2012年第2期问题解答

846. 在$\triangle ABC$中, $\angle C=90^\circ$, D是AB上一点, 使$BD=BC$; E是过A且垂直于AB的直线上一点(点E、C在AB的同侧), 且使$AE=AC$; DE交AC于点F, 求证: $\frac{1}{DF}-\frac{1}{DC}=\frac{2}{DE}$.

(401555 重庆市合川太和中学 袁安全供题)

证: 如图1, 设DE交$\triangle ABC$外接圆于点G, 连AG、CG、CE.

图 1

由于$\angle C=90^\circ$, AB是$\triangle ABC$外接圆直径, 故AE与$\triangle ABC$外接圆相切,

$\angle CAE=\angle CBA$.

又由于$\triangle ACE$和$\triangle BCD$都是等腰三角形, 故$\angle CEA=\angle CDB$, A、D、C、E四点共圆.

$\because EA\perp AD$,

$\therefore$ 该圆的圆心必在DE上.

又$\angle AGC=180^\circ-\angle B=180^\circ-\angle CAE=2\angle AEC$,

所以G是四边形$ADCE$外接圆的圆心.

于是$GA=GC=GD=GE=\frac{1}{2}DE$,

$\angle GCA=\angle GEA=\angle DCA$,

所以$\frac{DC}{DF}=\frac{CG}{FG}=\frac{DG}{DG-DF}$, 即

$DC\cdot DG-DC\cdot DF=DF\cdot DG$.

上式两边同除以$DC\cdot DF\cdot DG$, 得

$$\frac{1}{DF}-\frac{1}{DG}=\frac{1}{DC}.$$

移项得

$$\frac{1}{DF}-\frac{1}{DC}=\frac{1}{DG}=\frac{2}{DE}.$$

847. 已知n是正整数, 求证: $(\sec x\csc x)^{2n}-(\sec^{2n}x+\csc^{2n}x)\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$.

(274300 山东省单县二中 齐行超供题)

证: 设$\tan x=t$, 则由二项式定理及柯西不等式得

$$\begin{aligned}
&(\sec^{2n}x-1)(\csc^{2n}x-1)\\
&=[(1+t^2)^n-1]\left[\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^n-1\right]\\
&=(C_n^1t^2+C_n^2t^4+\cdots+C_n^nt^{2n})\\
&\quad\cdot\left(C_n^1\frac{1}{t^2}+C_n^2\frac{1}{t^4}+\cdots+C_n^n\frac{1}{t^{2n}}\right)\\
&=[(\sqrt{C_n^1}t)^2+(\sqrt{C_n^2}t^2)^2+\cdots+(\sqrt{C_n^n}t^n)^2]\\
&\quad\cdot\left[\left(\sqrt{C_n^1}\frac{1}{t}\right)^2+\left(\sqrt{C_n^2}\frac{1}{t^2}\right)^2+\cdots+\left(\sqrt{C_n^n}\frac{1}{t^n}\right)^2\right]\\
&\geqslant(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n)^2=(2^n-1)^2\\
&=2^{2n}-2^{n+1}+1,
\end{aligned}$$

所以$(\sec x\csc x)^{2n}-(\sec^{2n}x+\csc^{2n}x)$

$\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$.

848. 已知$\triangle ABC$的垂心H在该三角形内, 又点H到顶点A、B、C的距离分别为1、$\sqrt{2}$、$\sqrt{5}$, 试求垂心H到三条边BC、CA、AB的距离.

(223800 江苏省宿迁中学 陈炳堂供题)

解: 如图2, 设AD、BE、CF为$\triangle ABC$的三条高, $\triangle ABC$外接圆半径为R, 三内角A、B、C所对的边长分别为a、b、c.

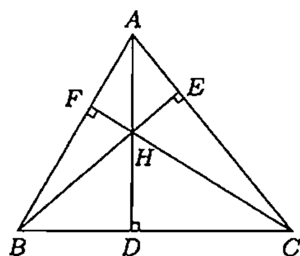


图 2

$\because \angle AHC=180^\circ-(\angle HAC+\angle HCA)$
$=180^\circ-(\angle HBC+\angle HBA)$
$=180^\circ-\angle ABC$,

$\therefore \triangle AHC$的外接圆与$\triangle ABC$的外接圆是等圆, 即$\triangle AHC$的外接圆半径也是R. 同理, $\triangle AHB$及$\triangle BHC$的外接圆半径均为R.

由正弦定理,
$HA=2R\sin\angle ACH=2R\cos\angle CAB$,
又$a=2R\sin\angle CAB$,
$\therefore HA^2+a^2=4R^2$.
同理, $HB^2+b^2=4R^2$, $HC^2+c^2=4R^2$.
$\because HA=1$, $HB=\sqrt{2}$, $HC=\sqrt{5}$,
$\therefore 1+a^2=2+b^2=5+c^2$,
$a=\sqrt{4+c^2}$, $b=\sqrt{3+c^2}$.
$\because \angle ABC+\angle CHA=180^\circ$,
$\therefore \cos\angle ABC+\cos\angle CHA=0$, 即
$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{1^2+(\sqrt{5})^2-b^2}{2\cdot1\cdot\sqrt{5}}=0,$$
亦即
$$\frac{c^2+(4+c^2)-(3+c^2)}{2c\sqrt{4+c^2}}+\frac{6-(3+c^2)}{2\sqrt{5}}=0.$$

由此得$\dfrac{c^2+1}{c\sqrt{4+c^2}}=\dfrac{c^2-3}{\sqrt{5}}$, $c^2>3$, 且化简得$c^8-2c^6-20c^4+26c^2-5=0$,

即$(c^2-5)(c^6+3c^4-5c^2+1)=0$.
$\because c^2>3$,
$\therefore c^6+3c^4-5c^2+1>c^6+9c^2-5c^2+1>0$. 于是$c^2=5$, $c=\sqrt{5}$. 进而
$a=\sqrt{4+c^2}=3$, $b=2\sqrt{2}$.

由$3=a=BD+CD=\sqrt{2-HD^2}+\sqrt{5-HD^2}$得$3-\sqrt{2-HD^2}=\sqrt{5-HD^2}$, 两边平方化简得$\sqrt{2-HD^2}=1$, $HD=1$. 同理可解得$HE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $HF=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

849. 已知$\odot O$的非直径弦AC与BD相交于点M, 射线BA与CD相交于点P, 过点A、C作$\odot O$的切线相交于点N, 过点B、D作$\odot O$的切线相交于点Q, 求证: P、Q、N三点共线.

(404506 重庆市云阳县江口中学 姜官杨 供题)

证: 建立如图3所示的直角坐标系, 并设$\odot O$的方程为$x^2+y^2=R^2$. 连BC、PM并延长交BC于点E.

设$\dfrac{PA}{AB}=\lambda_1$, $\dfrac{PD}{DC}=\lambda_2$,

则$\lambda_1+\lambda_2=\dfrac{S_{\triangle PMC}}{S_{\triangle BMC}}+\dfrac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle BMC}}$
$=\dfrac{S_{\triangle PBC}-S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle BMC}}=\dfrac{PE}{ME}-1=\dfrac{PM}{ME}$.

又由塞瓦定理, 可得$\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

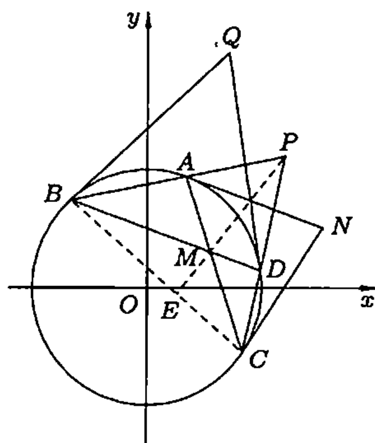


图 3

设$M(m,n)$, 并用y_A、x_A分别表示点A的纵、横坐标等. 由定比分点公式可得$(1+\lambda_1)x_A=x_P+\lambda_1x_B$, $(1+\lambda_1)y_A=y_P+\lambda_1y_B$.

因为点A、B在$\odot O$上, 因此有
$(x_P+\lambda_1x_B)^2+(y_P+\lambda_1y_B)^2=(1+\lambda_1)^2R^2$,
$\lambda_1^2x_B^2+\lambda_1^2y_B^2=\lambda_1^2R^2$.

两式相减得$x_P(x_P+2\lambda_1x_B)+y_P(y_P+2\lambda_1y_B)=R^2(1+2\lambda_1)$. ……①

同理有$x_P(x_P+2\lambda_2x_C)+y_P(y_P+2\lambda_2y_C)=R^2(1+2\lambda_2)$. ……②

①+②并除以2得$x_P(x_P+\lambda_1x_B+\lambda_2x_C)+y_P(y_P+\lambda_1y_B+\lambda_2y_C)=R^2(1+\lambda_1+\lambda_2)$. ……③

由$\dfrac{PM}{ME}=\lambda_1+\lambda_2$可得
$$x_E=\frac{m(1+\lambda_1+\lambda_2)-x_P}{\lambda_1+\lambda_2}, \quad \cdots\cdots ④$$

$$y_E=\frac{n(1+\lambda_1+\lambda_2)-y_P}{\lambda_1+\lambda_2}. \quad ⑤$$

又由 $\frac{BE}{EC}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ 可得

$$x_E=\frac{\lambda_1 x_B+\lambda_2 x_C}{\lambda_1+\lambda_2}, \quad ⑥$$

$$y_E=\frac{\lambda_1 y_B+\lambda_2 y_C}{\lambda_1+\lambda_2}. \quad ⑦$$

由④、⑥得

$m(1+\lambda_1+\lambda_2)=x_P+\lambda_1 x_B+\lambda_2 x_C$;

同理由⑤、⑦得

$n(1+\lambda_1+\lambda_2)=y_P+\lambda_1 y_B+\lambda_2 y_C$.

代入③得

$(1+\lambda_1+\lambda_2)(mx_P+ny_P)=R^2(1+\lambda_1+\lambda_2)$,

即 $mx_P+ny_P=R^2$.

∴ 点P在直线$mx+ny=R^2$上.

因为切线AN、CN的方程分别为

$x_Ax+y_Ay=R^2$, $x_Cx+y_Cy=R^2$.

点N既在AN上又在CN上, 所以

$x_Ax_N+y_Ay_N=R^2$, $x_Cx_N+y_Cy_N=R^2$,

即直线AC的方程为$x_Nx+y_Ny=R^2$.

因为点M在直线AC上, 所以$mx_N+ny_N=R^2$, 即点N在直线$mx+ny=R^2$上.

同理, 点Q在直线$mx+ny=R^2$上. 故P、Q、N共线.

850. 设$\sigma(n)$表示正整数n的正约数之和, 求证: 存在无穷多个正整数n, 使$\sigma(n)>2008n$.

(法国考题　200002　上海市黄浦区教师进修学院　周元解答)

证: 因调和级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$是发散的, 故存在$T\in\mathbf{N}^*$, 使$\sum\limits_{k=1}^{T}\frac{1}{k}>2008$.

记P_k是从小到大第k个素数. 取$M\in\mathbf{N}^*$, 使$P_1^M=2^M>T$. 于是当$l\in\mathbf{N}^*, l\geqslant M$时, 总有$P_i^l\geqslant P_1^l\geqslant P_1^M>T$.

设$s\in\mathbf{N}^*$, 使$P_s\leqslant T<P_{s+1}$. 对$l\in\mathbf{N}^*, l\geqslant M$, 令$n_l=P_1^lP_2^l\cdot\cdots\cdot P_s^l$,

则 $\sigma(n_l)=\prod\limits_{i=1}^{s}(1+P_i+\cdots+P_i^l)$

$$=n_l\cdot\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{P_i^l}+\frac{1}{P_i^{l-1}}+\cdots+\frac{1}{P_i}+1\right).$$

注意到 $\prod\limits_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{P_i^l}+\cdots+\frac{1}{P_i}+1\right)$ 的展开式包含了形如 $\frac{1}{P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot P_s^{\alpha_s}}$ 的一切项, 其中 $0\leqslant\alpha_i\leqslant l\,(l\leqslant i\leqslant s)$.

由于$1, 2, \cdots, T$中每个数的素因数都不超过P_s, 且所含次数都不超过l, 因而$\sum\limits_{i=1}^{T}\frac{1}{k}$中的每一项都在前述展开式中出现, 故

$$\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{P_i^l}+\cdots+\frac{1}{P_i}+1\right)\geqslant\sum_{k=1}^{T}\frac{1}{k}>2008.$$

于是$\sigma(n_l)>2008n_l$.

由于l可取不小于M的一切正整数, 因此命题得证.

2012年第4期问题

851. 在$\triangle ABC$中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$, 点M_1、M_2在边AC上, 且$AM_1=CM_2$, 过A作$AH_1\perp BM_1$于H_1, $AH_2\perp OM_2$于H_2, O为BC的中点, 求证:

$AH_1\cdot AH_2=2\cdot OH_1\cdot OH_2$.

(610031　四川省成都市　宿晓阳供题)

852. 设实数a、b使方程$x^4-ax^3-bx^2-ax+1=0$有实根, 求a^2+b^2的最小值.

(473200　河南省方城县教研室　邵明宪供题)

853. 已知正整数$N=4c+3\,(c\in\mathbf{N}^*)$为合数, 求证: N的因数个数(含1和它本身)为偶数.

(433123　湖北省潜江市江汉油田高级中学　舒云水供题)

854. 设$x_i>1$, $i=1,2,\cdots n\,(n\geqslant 3)$, 且$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=n-1$, 求证: $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i-1}$.

(712000　陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心　安振平供题)

855. $\triangle ABC$中, 三内角A、B、C所对三边长分别为a、b、c, 外接圆、内切圆半径分别为R、r, 求证:

$$\frac{2}{R^2}\leqslant\frac{\csc^2\frac{A}{2}}{b^2+c^2}+\frac{\csc^2\frac{B}{2}}{c^2+a^2}+\frac{\csc^2\frac{C}{2}}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{2r^2}.$$

(643200　四川省富顺县城关中学　李显权供题)

(本栏目负责人　李大元　汪纯中)

简说分形几何

200062 华东师范大学数学系 郑英元

什么是分形几何(fractal geometr)?至今还没有一个很确切的定义.

首先"分形"(fractal)一词是美国数学家曼德勃罗(Benoit B. Mandelbrot, 1924 2010)于1975年根据拉丁文构造出来的, 其原意是不规则、支离破碎等意义. 作为一个学科的分形几何学从此诞生了. 它是以非规则几何形态为研究对象的几何学. 由于不规则现象在自然界是普遍存在的, 所以分形几何建立以后, 很快就引起学科界的关注. 又由于分形几何所研究的空间的维数不一定是整数, 这也是几何学的一个新突破.

所谓分形一般是指可以将某一图形分成数个部分, 且每一部分都是它整体尺寸的缩小形状. 这个性质称为自相似. 以图1的分形树来说: 一个树杆有两个分叉(0): 每一个分叉可以作为树杆, 它又有两个分叉(1): 同样每一个分叉又作为树杆, 那么它又有两个分叉(2): 由此不断作下去, 就得到一个分形树的图像. 它的每一个局部, 都是整体形象的缩小, 而且与整体自相似.

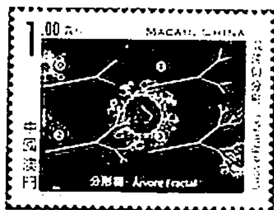
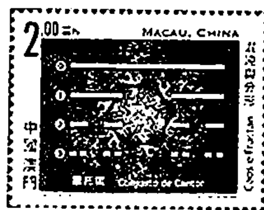


图1(中国澳门, 2005)

实际上, 在曼德勃罗提出"分形"的概念之前, 在数学界已经有很多这类"自相似"的分形图形的例子. 如:

德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm, 1815 1897)于1872年给出一个处处连续但处处不可微的例子, 它的构造方法符合现在所说分形概念.

1883年德国数学家康托尔(Georg Cantor, 1845 1918)给出一种点集(图2): 一条直线, 三等分后舍去中间一段. 对余下的两段同样三等分后舍去中间一段, 无限反复上述工作, 得到我们现在称之为的康托尔集. 它是测度为0的不可列点集, 容易看到它是自相似的图形.



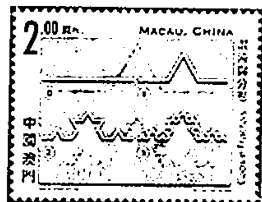


图2(中国澳门, 2005) 图3(中国澳门, 2000)

瑞典数学家科赫(Helge von Koch, 1870 1924)于1904年也提出一个处处连续但处处不可微的例子. 其构造方法是: 在一条直线段(图3中0)上作三等分, 取中间一段为底作向上正三角形, 删去这个正三角形的底边, 这时直线段变成由4条小直线段连结而成的折线(图3中1). 对每条小直线段作三等分, 取中间一段再作向外的正三角形(图3中2), 继续上述工作得图3中3. 无限进行下去, 就得到一个处处连续但处处不可微的例子. 如果对某一正三角形的每一边, 都按照上述方法操作, 则得到一个雪花图案, 也称为科赫雪花(图4是科赫雪花的绘制过程). (待续)

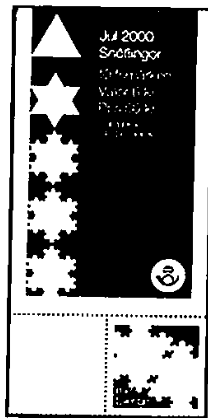


图4(瑞典小本票, 2000)

编后漫笔

从数学的“尝试教学”谈到“话语权”问题

张奠宙　赵小平

中国数学教育界的一大创造是“尝试教学”的提出. 主要来自三方面:

(1) 在小学数学教育界, 有邱学华的“尝试教学”;

(2) 顾泠沅教授的青浦经验提出“尝试指导、效果回授”的教学策略;

(3) 陈重穆教授的32字诀, 有“先做后说, 师生共作”.

显然, “尝试教学”是中国的创造, 与之对应的是西方的话语: “探究、发现”.

应该说, “尝试教学”的提法, 更加适用于基础教育.

它既考虑到激发学生的思考, 体现学生的学习主体地位, 又关注到实际的效果, 特别是小学和初中, 学生年龄较小、心智尚不成熟, 要他们“探究、发现”, 从事一个课题(Project)的设计和探讨, 完全要独立地摸索, 未免过于沉重. “尝试教学”的好处是:

(1) 尝试的起点低, 人人都能参与;

(2) 尝试容许犯错, 减轻学生的心理负担;

(3) 尝试不必完成一个课题, 可以浅尝辄止, 灵活把握;

(4) 尝试强调教师主导, 扶着过河;

(5) 尝试成本较低, 可以提高教学效率.

应该说, “尝试教学”是本土化的“探究、发现”, 具有强大的生命力.

我国数学教育界要把握自己的话语权, 重视自己的创造, 大声说, “尝试教学”好!

~~~~~~

(上接第4-32页)

近线 $y=0$. 故可画出函数 $f(x)$ 的正确草图 (如图3).

易知当 $a\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 时, $y=\frac{\ln x}{x}$ 与 $y=a$ 无交点, 即 $ax=\ln x$ 无解;

当 $a\in(-\infty,0]\cup\left\{\frac{1}{e}\right\}$ 时, $y=\frac{\ln x}{x}$ 与 $y=a$ 有且只有一个交点, 即 $ax=\ln x$ 有一解;

当 $a\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时, $y=\frac{\ln x}{x}$ 与 $y=a$ 有两个交点, 即 $ax=\ln x$ 有两解.

评注: 在作函数图像时, 往往需要考虑函数的定义域、奇偶性、周期性、特殊点(与坐标轴的交点、不连续点、不可导点等)、单调区间、极值点、函数凸性、拐点以及运用极限思路研究函数的走势即渐近线等. 只有通过研究函数性态准确地画出函数图像, 才能有效数形结合.

总之, 在导数的学习中, 常常需要回到定义中去, 仔细甄别各种形同质异的问题, 才能有效避免错误.

数学教学

SHU XUE JIAO XUE

2012年第4期(总第296期)

名誉主编: 张奠宙

主　　编: 赵小平

常务副主编: 忻重义

发行范围: 公开

电　话: 021-62232712

主管单位: 中华人民共和国教育部

主办单位: 华东师范大学

出　　版: 上海《数学教学》杂志社

邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)

广告许可证: 3100720050001

印　　刷: 华东师范大学印刷厂

国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局

国内订阅: 全国各邮电局

电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 5.50元　国内统一连续出版物号: CN31-1024/G4　每月12日出版　代号: 4-357
~~~~~~